GROUPES DE CREMONA, CONNEXITÉ ET SIMPLICITÉ

JÉRÉMY BLANC

Résumé. Le groupe de Cremona est connexe en toute dimension et, muni de sa topologie, il est simple en dimension 2.

abstract The Cremona group is connected in any dimension and, endowed with its topology, it is simple in dimension 2.

24 octobre 2009

1. Questions et résultats

Soit k un corps algébriquement clos. On note $\mathrm{Cr}_n(k)$ le groupe de Cremona de dimension n, groupe des transformations birationnelles de $\mathbb{P}^n_k$, anti-isomorphe via l'action sur le corps des fractions rationnelles à $\mathrm{Aut}_k(k(x_1,\dots,x_n))$. Ce groupe est muni d'une topologie naturelle (décrite à la section 2).

En 1974, dans un rapport sur les questions ouvertes importantes en géométrie algébrique [Mum74], D. Mumford consacre un paragraphe au groupe $\mathrm{Cr}_2(k)$. Il parle de mettre une topologie sur le groupe, et pose alors la question : ce groupe est-il simple ? Le théorème 4.2 démontré plus bas permet de répondre par l'affirmative.

La technique utilisée pour cela est élémentaire. Elle permet également de prouver que le groupe $\mathrm{Cr}_n(k)$ est connexe pour tout n (Théorème 5.1). Ceci répond à une question posée par J.-P. Serre lors du 1000ème exposé Bourbaki [Ser08], concernant la dimension $n \geq 3$, le cas $n \leq 2$ étant déjà bien connu.

Cet article est articulé ainsi : la section 2 donne des rappels sur la topologie de Zariski de $\mathrm{Cr}_n(k)$, la section 3 présente un lemme de déformation, qui permet de montrer la simplicité de $\mathrm{Cr}_2(k)$ (section 4) et la connexité de $\mathrm{Cr}_n(k)$ (section 5).

Je tiens à remercier J.-P. Furter pour des discussions intéressantes sur cet article, et tout spécialement J.-P. Serre pour ses relectures attentives de cet article et ses précieuses corrections.

2. La topologie de Zariski de $\mathrm{Cr}_n(k)$

Soit X une k-variété (k est toujours le corps algébriquement clos fixé au départ). On note $\mathrm{Bir}(X)$ l'ensemble des applications birationnelles $X \dashrightarrow X$, et $\mathrm{Aut}(X) \subset \mathrm{Bir}(X)$ le groupe des automorphismes de X.

Afin de décrire la topologie de $\mathrm{Bir}(X)$, décrivons tout d'abord les morphismes $A \to \mathrm{Bir}(X)$:

Date: 24 octobre 2009.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 14E07, 14L30, 22F50.

Key words and phrases. Groupe de Cremona, topologie, connexité, simplicité, Cremona group, topology, connexity, simplicity.

Définition 2.1. Une *famille algébrique* d'éléments de $\mathrm{Bir}(X)$ est la donnée d'une application rationnelle $f : A \times X \dashrightarrow X$ où A est une k-variété, définie sur un ouvert dense U tel que, pour tout $a \in A$, $U_a := U \cap (\{a\} \times X)$ soit un ouvert dense de $\{a\} \times X$ et que la restriction de $\mathrm{id} \times f$ à U soit un isomorphisme de U sur un ouvert dense de $A \times X$.

Pour tout $a \in A$, l'application birationnelle $x \dashrightarrow f(a,x)$ représente alors un élément $f_a \in \mathrm{Bir}(X)$. La famille f_a $(a \in A)$ représente une application $A \to \mathrm{Bir}(X)$, que l'on appelera *morphisme* de A vers $\mathrm{Bir}(X)$.

Cette définition correspond à celle de [Ser08] et [Dem70, §1] ; un morphisme $A \to \mathrm{Bir}(X)$ correspond alors à un pseudo-automorphisme du A-schéma $A \times X$. On définit la topologie de Zariski sur $\mathrm{Bir}(X)$ de la manière suivante (voir [Ser08, §1.6]) :

Définition 2.2. On dit qu'un ensemble $R \subset \mathrm{Bir}(X)$ est *fermé* si pour toute k-variété A et tout morphisme $A \to \mathrm{Bir}(X)$, la préimage de R dans A est fermée.

Comme l'explique [Ser08], ceci donne une topologie sur $\mathrm{Bir}(X)$, qui est la topologie la plus fine qui rende les morphismes vers $\mathrm{Bir}(X)$ continus. De plus, en définissant de manière analogue la topologie de Zariski sur $\mathrm{Bir}(X) \times \mathrm{Bir}(X)$, la composition donne une application continue $\mathrm{Bir}(X) \times \mathrm{Bir}(X) \to \mathrm{Bir}(X)$.

En particulier, on peut restreindre ceci à $\mathrm{Aut}(X)$ et mettre ainsi une topologie sur ce groupe. Lorsque $X = \mathbb{P}^n_k$, on peut démontrer que l'on retrouve la topologie de Zariski habituelle du groupe algébrique $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{PGL}(n+1, k)$ et qu'en fait $\mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Cr}_n(X)$ est une immersion fermée [Ser09].

Les groupes qui nous intéressent le plus sont ceux où la k-variété X est rationnelle. On rappelle que si X est rationnelle, de dimension n, alors $\mathrm{Bir}(X)$ s'identifie naturellement à $\mathrm{Cr}_n(k) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ via une application birationnelle choisie $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n_k$; le choix de celle-ci fait juste varier l'homéomorphisme $\mathrm{Bir}(X) \to \mathrm{Cr}_n(k)$. Dans la suite, on prendra le plus souvent $X = \mathbb{A}^n_k$ ou $X = \mathbb{P}^n_k$, suivant les besoins.

3. Préliminaires techniques

3.1. **Le groupe de de Jonquières.** Pour $n \geq 2$, notons ϕ la projection

$$(x_0 : \ldots : x_n) \dashrightarrow (x_1 : \ldots : x_n)$$

de $\mathbb{P}^n_k$ dans $\mathbb{P}^{n-1}_k$. On appelle *groupe de de Jonquières* J_n le sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ qui préserve l'ensemble des fibres de ϕ. On note J_n^0 le sous-groupe de J_n constitué des éléments qui préservent une fibre générale de ϕ.

De manière affine, on peut restreindre ϕ à la projection $k^n \to k^{n-1}$, et ainsi voir que J_n est naturellement isomorphe à $J_n^0 \rtimes \mathrm{Bir}(k^{n-1})$, où

$$J_n^0 \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_K) \simeq \mathrm{PGL}(2, K), \text{ avec } K = k(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

L'homomorphisme déterminant $\mathrm{GL}(2, K) \to K^*$ induit un homomorphisme surjectif

$$\det\colon \mathrm{PGL}(2, K) \to K^*/(K^*)^2,$$

où $(K^*)^2$ désigne l'ensemble des carrés de K^*. On notera $J_n^1 \subset J_n^0$ le sous-groupe normal correspondant au noyau de det. Alors, l'homomorphisme précédent nous donne

$$J_n^1 \simeq \mathrm{PSL}(2, K).$$

Le groupe J_n^1 est simple [Die71, Chapitre II, §2]. De plus, comme tout élément $f \in J_n^0$ satisfait $\det(f^2) = 1$, le quotient J_n^0/J_n^1 est un groupe abélien de type $(2, \dots, 2, \dots)$. Les classes de $J_n^0 \pmod{J_n^1}$ sont représentées par les involutions de de Jonquières $f_h\colon (x_1, \dots, x_n) \dashrightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, h/x_n)$, où $h \in k(x_1, \dots, x_{n-1})^* = K^*$. Puisque $\det(f_h) = -h$, deux involutions f_h et $f_{h'}$ représentent la même classe si et seulement si h/h' est un carré dans K^*.

3.2. **Dérivée normale.** Dans cette section, on se donne la situation suivante :

Partons d'une k-variété lisse X. Soit Y la droite affine sur k et soit $Z = X \times Y$; le morphisme $x \mapsto (x, 0)$ identifie X à une sous-variété de Z. Soit U un ouvert dense de Z tel que $U_X := U \cap X$ soit dense dans X et soit $f\colon U \to Z$ un morphisme qui envoie U_X dans X ; notons $f_X\colon U \to X$ et $f_Y\colon U \to Y$ les deux composantes de f.

À partir de cette donnée, on va définir la dérivée normale de f, qui est une application rationnelle $f_0\colon Z \dashrightarrow Z$, et montrer qu'il s'agit d'une limite de conjugués de f.

La fonction f_Y a la propriété que $f_Y(x, y) = 0$ si $y = 0$; on en déduit que f_Y est divisible par la fonction "y", ce qui veut dire que $f_Y(x, y) = y \cdot g_Y(x, y)$ pour une certaine fonction g_Y sur U. Ceci nous permet de définir la *dérivée normale de f le long de X*, qui est le morphisme

$$f_0\colon U_X \times Y \to Z,$$

donné par la formule $f_0(x, y) = (f_X(x, 0), y \cdot g_Y(x, 0))$.

On remarque que f_0 ne dépend que du comportement de f dans un voisinage infinitésimal de X et est une sorte de linéarisation de f ; en fait f_0 ne dépend pas du choix de l'ouvert U mais seulement de f vue comme application rationnelle de Z dans lui-même. De plus $(x, 0) \mapsto f_X(x, 0)$ est la restriction de f à X, ce qui implique que f_0 est compatible avec la projection $Z \to X$; on a les diagrammes commutatifs

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} U_X \times Y \arrow[r, "f_0"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ U_X \arrow[r, "f|_{U_X}"] & X \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, dashed, "f_0"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X \arrow[r, dashed, "f|_X"] & X. \end{tikzcd}$$

De plus, f_0 est une homothétie sur chaque fibre.

Montrons maintenant que f_0 est une limite de conjugués de f. Soit T un autre exemplaire de la droite affine sur k ; pour tout $t \in T$, soit U_t l'ouvert de Z formé des (x, y) tels que (x, ty) appartienne à U. Remarquons que $U_0 = U_X \times Y$. La réunion U_T des $\{t\} \times U_t$ est un ouvert de $T \times Z$ contenant $T \times U_X$. Si $t \neq 0$, soit s_t l'automorphisme $(x, y) \mapsto (x, ty)$ de Z et posons $f_t = s_t^{-1} \circ f \circ s_t$, ce qui a un sens sur U_t ; si $t = 0$ définissons $f_t = f_0$ comme ci-dessus ; c'est un morphisme défini sur $U_0 = U_X \times Y$.

Lemme 3.1. *Avec les notation précédentes, la famille des f_t ($t \in T$) définit un morphisme $F\colon U_T \to Z$.*

Démonstration. On a $F(t, x, y) = (f_X(x, ty), y \cdot g_Y(x, ty))$: lorsque $t \neq 0$ cela résulte de $t^{-1} f_Y(x, ty) = y \cdot g_Y(x, ty)$ et lorsque $t = 0$ c'est la définition de f_0. Le lemme suit alors du fait que $(t, x, y) \mapsto f_X(x, ty)$ et $(t, x, y) \mapsto g_Y(x, ty)$ sont des morphismes définis sur U_T. $\square$

Lemme 3.2. *Avec les mêmes notations qu'avant, supposons de plus que X est irréductible, que f est un isomorphisme de U sur un ouvert V de Z et que f se restreint à un isomorphisme de $U_X = U \cap X$ vers $V_X = V \cap X$ (ce qui implique que $f \in \mathrm{Bir}(Z)$ et $f|_X \in \mathrm{Bir}(X)$).*

Alors, la famille f_t ($t \in T$) définit un morphisme $T \to \mathrm{Bir}(Z)$ (au sens de la définition 2.1).

Démonstration. Le lemme 3.1 montre que $F \colon U_T \to Z$ est un morphisme, qui induit donc une application rationnelle $T \times Z \dashrightarrow Z$. Pour tout $t \in T$, $U_T \cap (\{t\} \times Z)$ n'est rien d'autre que $\{t\} \times U_t$, ouvert dense de $\{t\} \times Z$ par construction, et la restriction de F à cet ouvert correspond à f_t.

Notons $r \colon V \to U$ l'inverse de f, qui applique $V_X = V \cap X$ dans X par construction, et utilisons la construction précédente pour $r = (r_X, r_Y)$. On a $V_t = \{(x, y) \in Z \mid (x, ty) \in V\}$ et le lemme 3.1 nous donne un morphisme $R \colon V_T \to Z$, dont la restriction à $\{t\} \times V_t$ correspond à r_t.

Il suffit alors de voir que $\mathrm{id} \times f$ est un isomorphisme de U_T vers V_T, dont l'inverse est $\mathrm{id} \times r$, ce qui peut par exemple se déduire de la forme explicite de $F(t, x, y)$ et $R(t, x, y)$ donnée dans la preuve du lemme 3.1. $\square$

3.3. **Le lemme de déformation appliqué au groupe de Cremona.** Rappelons que si Z est une k-variété irréductible lisse, si $f \in \mathrm{Bir}(Z)$ et $H, H' \subset Z$ sont deux hypersurfaces irréductibles, on dit que f *se restreint à une application birationnelle* $f|_H \colon H \dashrightarrow H'$ si f est définie sur un ouvert U tel que $U \cap H$ soit un ouvert dense de H et tel que $f|_{U \cap H} \colon U \cap H \to H'$ soit une immersion ouverte. On peut également présenter cette notion de la façon suivante : les hypersurfaces H et H' définissent des valuations discrètes v et v' du corps des fonctions de Z, et l'on demande que f transforme v en v'.

En appliquant les résultats de la section 3.2 au cas d'une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^n_k$, nous allons démontrer le résultat suivant.

Lemme 3.3. *Pour $n \geq 2$, notons $H_0 \subset \mathbb{P}^n_k$ l'hyperplan d'équation $x_0 = 0$. Soit $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ un élément qui se restreint à une application birationnelle $f|_{H_0} \colon H_0 \dashrightarrow H_0$.*

Notons $Z \subset \mathbb{P}^n_k$ le complémentaire de l'hyperplan d'équation $x_n = 0$ et $X = Z \cap H_0$, de telle sorte que $Z = X \times Y$ avec $Y \cong \mathbb{A}^1_k$.

Alors, en reprenant les notations de la section 3.2, la dérivée normale f_0 de f le long de X est un élément de J_n tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^n_k \arrow[r, dashed, "f_0"] \arrow[d, dashed] & \mathbb{P}^n_k \arrow[d, dashed] \\ H_0 \arrow[r, dashed, "f|_{H_0}"] & H_0, \end{tikzcd} \tag{2}$$

où les flèches verticales correspondent à la projection $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \dashrightarrow (0 : x_1 : \ldots : x_n)$. Le morphisme donné par le lemme 3.2

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^1_k \cong T & \to & \mathrm{Bir}(Z) \cong \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k) \\ t & \mapsto & f_t \end{array}$$

envoie 0 *sur* f_0*,* 1 *sur* $f_1 = f$ *et* $t \neq 0$ *sur* $f_t = s_t^{-1} \circ f \circ s_t$ *où* s_t *correspond ici à l'automorphisme* $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (tx_0 : x_1 : \ldots : x_n)$ *de* $\mathbb{P}_k^n$*.*

Démonstration. On a $X \cong \mathbb{A}_k^{n-1}$ et $Z = X \times Y \cong \mathbb{A}_k^n$ est un ouvert dense de $\mathbb{P}_k^n$. On se donne deux ouverts $U, V \subset Z \subset \mathbb{P}^n$ tels que f se restreigne à un isomorphisme $U \to V$ et également à un isomorphisme $U_X = U \cap X \to V_X = V \cap X$, où U_X et V_X sont denses dans X. On peut alors utiliser tous les résultats de la section 3.2. La projection $Z \to X$ correspond à $\phi\colon \mathbb{P}_k^n \dashrightarrow H_0$ donné par $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \dashrightarrow (0 : x_1 : \ldots : x_n)$. La commutativité du diagramme (1) entraîne donc celle de (2) et implique que $f_0 \in J_n$. Le morphisme $t \mapsto f_t$ est donné par le lemme 3.2 et sa description ici résulte de celle donnée précédemment. $\square$

4. Simplicité de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$

Proposition 4.1. *Supposons* $n \geq 2$*. Soit* $N \subset \mathrm{Cr}_n(k)$ *un sous-groupe non trivial qui soit à la fois normal et fermé. Alors,* N *contient* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^n) \simeq \mathrm{PGL}(n+1, k)$ *et* $J_n^1 \simeq \mathrm{PSL}(2, k(x_1, \ldots, x_{n-1}))$*.*

Démonstration. Soit h un élément non trivial de N, qui se restreint à un isomorphisme $h|_U : U \to V$, où U, V sont des ouverts denses de $\mathbb{P}_k^n$. Soit p un point de U et notons $q = h(p) \in V$ son image ; on peut supposer que q et p sont différents. Il existe un élément $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^n)$ qui fixe à la fois q et p. Par conséquent, $g = (\alpha h^{-1} \alpha^{-1}) h \in N$ fixe p (et q).

Notons T_p l'espace tangent à p et $\mathbb{P}(T_p) \simeq \mathbb{P}_k^{n-1}$ son projectivisé. Alors, g induit un automorphisme $g_p \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(T_p))$. Montrons maintenant que pour un choix convenable de α, l'automorphisme g_p est non trivial. Comme h envoie p sur q via un isomorphisme local, il induit un isomorphisme (linéaire) $l : \mathbb{P}(T_p) \to \mathbb{P}(T_q)$. En notant $\alpha_p \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(T_p))$ et $\alpha_q \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(T_q))$ les automorphismes induits par les actions respectives de α sur $\mathbb{P}(T_p)$ et $\mathbb{P}(T_q)$, on a $g_p = \alpha_p l^{-1} (\alpha_q)^{-1} l$. Pour que g_p soit non trivial, il suffit par exemple de choisir $\alpha = (x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (\lambda x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$, avec $\lambda \in k \backslash \{0, 1\}$, si $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$ et $q = (0 : 1 : 0 : \ldots : 0)$.

Soit $\sigma\colon (x_0 : \ldots : x_n) \dashrightarrow (\frac{1}{x_0} : \ldots : \frac{1}{x_n})$ la transformation standard de $\mathbb{P}_k^n$ (de degré n), alors σ est une involution qui contracte l'hyperplan H_0 d'équation $x_0 = 0$ sur le point $(1 : 0 : \ldots : 0)$, et qui envoie la valuation associée à H_0 sur celle associée au diviseur exceptionnel obtenu en éclatant $(1 : 0 : \ldots : 0)$. En choisissant $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$ (quitte à conjuguer g par un automorphisme de $\mathbb{P}_k^n$), $f = \sigma^{-1} g \sigma \in N$ induit une application birégulière non triviale de l'hyperplan H_0 dans lui-même, correspondant à $g_p \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(T_p))$. D'après le lemme 3.3, il existe dans N un élément $f_0 \in J_n$, qui préserve la fibration rationnelle $\phi : \mathbb{P}_k^n \dashrightarrow H_0$ donnée par $(x_0 : \ldots : x_n) \dashrightarrow (0 : x_1 : \ldots : x_n)$ et agit sur la base du pinceau comme $f_{|H_0}$, donc de manière non triviale.

Montrons maintenant qu'il existe $\beta \in J_n^0$ tel que $r = \beta^{-1} f_0 \beta (f_0)^{-1}$ soit un élément non trivial de $N \cap J_n^0$. Rappelons que J_n est isomorphe au produit semi-direct $J_n^0 \rtimes \mathrm{Bir}(k^{n-1})$, et écrivons $f_0 = (a, b)$ dans ce produit, avec $a \in J_n^0$ et $b \in \mathrm{Bir}(k^{n-1})$ non trivial par construction. Alors, r s'écrit

$$(\beta^{-1}, 1) \circ (a, b) \circ (\beta, 1) \circ (b^{-1}(a^{-1}), b^{-1}) = (\beta^{-1} \cdot a \cdot b(\beta) \cdot a^{-1}, 1).$$

Par conséquent, r est un élément de $N \cap J_n^0$, qui est de plus non trivial si et seulement si $\beta \neq a \cdot b(\beta) \cdot a^{-1}$. Si a est l'identité, il suffit de choisir $\beta \in J_n^0$ non fixé par b (par exemple un élément diagonal donné par une fonction de $k(x_1, \ldots, x_{n-1})$ qui n'est pas invariante par b). Si a n'est pas l'identité, on peut choisir pour β un élément de $\mathrm{PGL}(2,k) \subset \mathrm{PGL}(2,k(x_1,\ldots,x_{n-1}))$ ne commutant pas avec a.

On trouve donc que $N \cap J_n^0$ est un sous-groupe normal non trivial de $J_n^0 \simeq \mathrm{PGL}(2,k(x_1,\ldots,x_{n-1}))$, ce qui implique que N contient $J_n^1 \simeq \mathrm{PSL}(2,k(x_1,\ldots,x_{n-1}))$ (voir par exemple [Die71, Chapitre II, §2]). De plus, comme $J_n^1 \cap \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^n)$ est non trivial et $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^n) \simeq \mathrm{PGL}(n+1,k)$ est simple, N contient $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^n)$. □

Théorème 4.2. *Muni de sa topologie, le groupe* $\mathrm{Cr}_2(k) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ *est simple.*

Démonstration. Suit de la proposition précédente et du fait que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ est engendré par $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^2)$ et $J_2^1 \simeq \mathrm{PSL}(2,k(x_1))$. Démontrons cette dernière partie. On note $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ les éléments de $\mathrm{Cr}_2(k) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ suivants (vus ici sur la carte affine $(x_1,x_2) \mapsto (1:x_1:x_2)$) :

$$\begin{array}{llll} \alpha_1\colon & (x_1,x_2) & \dashrightarrow & (x_1,-\frac{1}{x_2}) \\ \alpha_2\colon & (x_1,x_2) & \dashrightarrow & (-\frac{1}{x_1},x_2) \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \beta_1\colon & (x_1,x_2) & \mapsto & (x_2,x_1); \\ \beta_2\colon & (x_1,x_2) & \mapsto & (-x_1,-x_2). \end{array}$$

Alors, α_1 est un élément de J_2^1 et β_1,β_2 sont deux éléments de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^2)$. De plus, $\alpha_2 = \beta_1\alpha_1\beta_1$ et $\alpha_1\alpha_2\beta_2$ est la transformation quadratique standard. Le résultat se déduit alors du théorème de Noether-Castelnuovo : le groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ est engendré par $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^2)$ et la transformation quadratique standard $(x_1,x_2) \dashrightarrow (\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2})$ (voir [Sha65, Chapter V, §5, Theorem 2, page 100] pour une preuve valable en toute caractéristique). □

Remarque 4.3. La simplicité de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$, en tant que groupe abstrait, est toujours ouverte. Pour de plus amples résultats dans cette direction, voir [Dan74] et [Giz94].

5. Connexité de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^n)$

Comme $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ est engendré par $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_k^2)$ et J_2^0, le groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^2)$ est connexe. En dimension supérieure, il n'existe pas d'analogue au théorème de Noether-Castelnuovo (voir [Pan99]) et il ne paraît pas évident à priori de trouver un ensemble adéquat de générateurs. Toutefois, nous pouvons prouver le résultat suivant :

Théorème 5.1. *Pour tout $n \geq 1$, le groupe* $\mathrm{Cr}_n(k) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}_k^n)$ *est* linéairement connexe *au sens suivant : pour tous $f,g \in \mathrm{Cr}_n(k)$, il existe un ouvert U de la droite affine sur k contenant* 0 *et* 1*, et un morphisme $\theta\colon U \to \mathrm{Cr}_n(k)$ tel que $\theta(0) = f$ et $\theta(1) = g$.*

En particulier, le groupe $\mathrm{Cr}_n(k)$ *est connexe.*

Démonstration. Si $U \subset \mathbb{A}_k^1$ est un ouvert contenant 0 et 1 et que le morphisme $\theta\colon U \to \mathrm{Cr}_n(k)$ satisfait $\theta(0) = f$ et $\theta(1) = g$, on dira que θ *joint* f *à* g ; en notant U' l'ouvert qui est l'image de U par $t \mapsto 1-t$, le morphisme $U' \to \mathrm{Cr}_n(k)$ défini par $t \mapsto \theta(1-t)$ joint g à f. De plus, si $\nu\colon V \to \mathrm{Cr}_n(k)$ joint g à h, le morphisme $U \cap V \to \mathrm{Cr}_n(k)$ défini par $t \mapsto \theta(t) \circ g^{-1} \circ \nu(t)$ joint f à h. On en déduit que la relation "f et g sont joignables" est une relation d'équivalence.

Notons $\mathcal{U}_0 \subset \mathrm{Cr}_n(k)$ l'ensemble des éléments joignables à l'identité. On observe que $\mathcal{U}_0$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{Cr}_n(k)$. En effet, si θ joint 1 à f, alors $t \mapsto \theta(1-t) \circ f^{-1}$ joint 1 à f^{-1} et si ν joint 1 à g, alors $t \mapsto \theta(t) \circ \nu(t)$ joint 1 à $f \circ g$; de plus si $h \in \mathrm{Cr}_n(k)$, $t \mapsto h \circ \theta(t) \circ h^{-1}$ joint 1 à $h \circ f \circ h^{-1}$.

Montrons maintenant que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathrm{PGL}(n+1,k)$ est contenu dans $\mathcal{U}_0$ (c'est-à-dire qu'il est linéairement connexe). Les éléments de la forme

$$(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) \mapsto (x_0 + \sum_{i=1}^{n} a_{0,i}x_i : x_1 + \sum_{i=2}^{n} a_{1,i}x_i : \ldots : x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n : x_n)$$

sont joignables à l'identité (remplacer tous les $a_{i,j}$ par $t \cdot a_{i,j}$ donne le morphisme souhaité). De même, un élément diagonal

$$(x_0 : \ldots : x_n) \mapsto (a_0x_0 : \ldots : a_nx_n)$$

est joignable à l'identité (remplacer a_i par $(a_i-1)t+1$ donne le morphisme souhaité). Comme ces éléments et leurs conjugués engendrent $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k)$, on en déduit que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \subset \mathcal{U}_0$.

Le même argument montre que $J_n^0 \simeq \mathrm{PGL}(2, k(x_1,\ldots,x_{n-1}))$ est contenu dans $\mathcal{U}_0$.

Pour $n = 1$, $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1_k) = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1_k)$, qui est linéairement connexe. On va alors supposer que $n \geq 2$ et que $\mathrm{Cr}_{n-1}(k)$ est linéairement connexe (en procédant par induction sur n). Alors le groupe J_n, engendré par J_n^0 et $\mathrm{Cr}_{n-1}(k)$, est contenu dans $\mathcal{U}_0$.

Montrons maintenant que tout élément $g \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_k)$ appartient à $\mathcal{U}_0$, ce qui donnera le résultat souhaité. Quitte à multiplier g par un élément de $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \subset \mathcal{U}_0$, on peut supposer que g a un point fixe p, et que g et son inverse soient régulières en p ; on supposera de plus après conjugaison que $p = (1 : 0 : \ldots : 0)$.

Soit $\sigma : (x_0 : \ldots : x_n) \dashrightarrow (\frac{1}{x_0} : \ldots : \frac{1}{x_n})$ la transformation standard de $\mathbb{P}^n_k$ (de degré n), alors σ est une involution qui contracte l'hyperplan H_0 d'équation $x_0 = 0$ sur le point p. L'élément $f = \sigma^{-1}g\sigma$ induit une application birégulière de H_0 dans lui-même. Le lemme 3.3 nous donne un élément $f_0 \in J_n$ (la dérivée normale de f le long de H_0) tel que f et f_0 sont joignables ; par conséquent $f \in \mathcal{U}_0$. Le groupe $\mathcal{U}_0$ étant normal dans $\mathrm{Cr}_n(k)$, g appartient également à $\mathcal{U}_0$. □

Références

[Dan74] V.I. Danilov, *Non-simplicity of the group of unimodular automorphisms of an affine plane.* Mat. Zametki **15** (1974), 289–293.

[Dem70] M. Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona.* Ann. Sci. École Norm. Sup. **3** (1970) 507–588.

[Die71] J.A. Dieudonné, *La géométrie des groupes classiques.* Troisième édition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 5. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[Giz94] M.H. Gizatullin, *The decomposition, inertia and ramification groups in birational geometry*, Algebraic Geometry and its Applications, Aspects of Mathematics, E, vol. **25** (1994), 39-45.

[Mum74] D. Mumford, *Algebraic Geometry* in *Mathematical developments arising from Hilbert problems.* Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society held at Northern Illinois University, De Kalb, Ill., May, 1974. 44–45.

[Pan99] I. Pan, *Une remarque sur la génération du groupe de Cremona.* Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **30** (1999), no. 1, 95–98.

[Ser08] J.-P. Serre, *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis.* Séminaire Bourbaki no **1000** (2008).

[Ser09] J.-P. Serre, lettre adressée à l'auteur.

[Sha65] I.R. Shafarevich, *Algebraic surfaces*, Proc. Steklov Inst. Math. **75** (1967).

Université de Genève, Section de mathématiques, 2-4 rue du Lièvre, Case postale 64, 1211 Genève 4, Suisse

E-mail address: `Jeremy.Blanc@unige.ch`