Algebraische Geometrie: Übungsblatt 9

Philippe Bonnet

Aufgabe 1:

Sei N die abgeschlossene Teilmenge der nilpotenten Matrizen von $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Zeige, dass $I(N) = (sp, det)$, wobei sp (bzw. det) die Spur (bzw. die Determinant) ist. Bestimme die singulären Punkte von N.

Aufgabe 2:

Betrachte die folgende Menge $D = \{(t^3, t^4, t^5) | t \in \mathbb{C}\}$.

- Zeige: D ist eine irreduzible Kurve von $\mathbb{C}^3$, d.h. D ist abgeschlossen, irreduzibel und hat Dimension 1 (Hinweis: Benutze den Morphismus $\varphi : \mathbb{C} \to D,\ t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$).
- Bestimme die Dimension von $T_{(0,0,0)}D$, und schliesse daraus, dass D nicht glatt ist (Hinweis: Berechne die Dimension des Quotients m/m^2, wobei m das Maximalideal von $\mathcal{O}(D) = \mathbb{C}[t^3, t^4, t^5] = \mathbb{C} \oplus \oplus_{i\geq 3}\mathbb{C}.t^i$ ist , das durch t^3, t^4, t^5 erzeugt ist).
- Zeige, dass D nicht isomorph zu $\mathbb{C}$ ist. Ist D birational zu $\mathbb{C}$? (Hinweis: Betrachte den ganzen Abschluss von $\mathcal{O}(D)$)
- Bestimme die algebraischen Vektorfelder der Kurve (Hinweis: Man bestimme die Derivationen der Algebra $\mathcal{O}(D) = \mathbb{C}[t^3, t^4, t^5] = \mathbb{C} \oplus \oplus_{i\geq 3}\mathbb{C}.t^i$).

Aufgabe 3:

Zeige, dass die ebene Kurve $C = \mathcal{V}(x^2 + xy + y^2 - 3y)$ glatt ist.

Aufgabe 4:

Betrachte den Morphismus $\varphi : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ (x, y, z) \mapsto xy^2 - z^3$. Zeige, dass alle Faser von φ irreduzibel sind. Bestimme die Werte t für welche $\varphi^{-1}(t)$ nicht glatt ist.