

**AUFGABEN ZUR EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRAISCHE  
GRUPPENTHEORIE, BLATT 1**

JAN DRAISMA

ABGABE BIS MITTWOCH, DEN 27. OKTOBER 2004

- (1) Sei  $M$  die Gruppe der monomialen Matrizen in  $GL_n$ , und sei  $D$  die Gruppe der Diagonalmatrizen in  $GL_n$ . Zeige, dass  $D$  ein Normalteiler von  $M$  ist und bestimme den Quotienten  $M/D$ . (Hinweis:  $M$  permutiert die Geraden  $Ke_1, \dots, Ke_n$ . Dies gibt ein Homomorphismus von  $M$  in die symmetrische Gruppe  $S_n$ , dessen Kern und Bild zu bestimmen sind.)
- (2) Wir betrachten in Charakteristik  $\neq 2$  die orthogonale Gruppe  $O_6$  bezüglich der symmetrischen Bilinearform mit Gram-Matrix

$$B = \begin{bmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & & & & & \end{bmatrix}$$

Definiere die elementaren Orthogonalmatrizen  $X_{i,j}(t)$  durch

$$X_{i,j}(t) := I + tE_{i,j} - tE_{7-j,7-i} \text{ für } 1 \leq i, j \leq 6, i \neq j, t \in K,$$

wo  $E_{i,j}$  die Matrix mit einer 1 an der Stelle  $(i, j)$  und sonst Nullen ist. Zu einer Permutation  $\pi \in S_6$  definieren wir weiter die  $6 \times 6$ -Permutationsmatrix  $P_\pi \in GL_6$  durch  $P_\pi(e_i) = e_{\pi(i)}$ .

- (a) Verifiziere  $X_{i,j}(t) \in O_6$ .
- (b) Zeige, dass die Gruppe  $\{\pi \in S_6 \mid P_\pi \in O_6\}$  genau aus den Permutationen  $\pi$  besteht, die mit  $(1, 6)(2, 5)(3, 4)$  vertauschen. Zeige, dass diese Gruppe erzeugt wird von  $(1, 6), (1, 2)(6, 5), (2, 3)(5, 4)$ .
- (c) Schreibe die Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

als  $LMU$ , wo  $L$  das Produkt von Matrizen  $X_{i,j}(t)$  mit  $i > j$  ist,  $M$  eine Monomialmatrix in  $O_6$  ist, und  $U$  das Produkt von Matrizen  $X_{i,j}(t)$  mit  $i < j$  ist. Hinweis: Linksmultiplikation mit  $X_{i,j}(t)$  bedeutet:  $t$  mal die  $j$ -te Zeile zur  $i$ -ten Zeile *addieren*, und  $t$  mal die  $(7-i)$ -te Zeile von der  $(7-j)$ -ten Zeile *subtrahieren*. Etwas ähnliches gilt für Rechtsmultiplikation. Fange nun mit der  $-1$  in der 1. Spalte an, und 'wische' durch

Linksmultiplikation mit  $X_{6,5}(-2)$  die  $-2$  in der 1. Spalte aus. Wische dann mit der gleichen  $-1$  durch Rechtsmultiplikation mit  $X_{1,2}(1)$  die 1 an der Stelle  $(5, 2)$  aus, usw.

- (d) Zeige, dass jede Matrix  $A = (a_{ij})$  in  $O_6$  folgende Eigenschaft hat: ist  $a_{i,j_0} = 0$  für alle  $i \notin \{i_0, 7 - i_0\}$ , dann ist *genau einer* von den beiden Einträgen  $a_{i_0,j_0}$  und  $a_{7-i_0,j_0}$  ungleich null.
- (e) Überlege, dass *jede* Matrix aus  $O_6$  sich als  $LMU$  mit  $L, M, U$  wie vorher schreiben lässt. Zeige insbesondere, dass man in der ersten Spalte tatsächlich alle Einträge ausser einem auswischen kann durch Linksmultiplikation mit geeigneten  $X_{i,j}(t)$ .
- (3) Sei  $A$  eine endlich-dimensionale Algebra über  $K$ , das heisst:  $A$  ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum über  $K$  mit einer Verknüpfung  $A \times A \rightarrow A$ ,  $(a, b) \rightarrow ab$ , die linear in beiden Argumenten ist—d.h.  $(a + b)c = ac + bc$ ,  $(\lambda a)b = \lambda(ab)$  für  $\lambda \in K$ , und das zweite Argument erfüllt die gleichen Bedingungen. Mit  $\text{Aut}(A)$  bezeichnen wir die Menge aller *Automorphismen* von  $A$ , d.h. aller  $K$ -linearen Isomorphismen  $\phi : A \rightarrow A$  die  $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$  genügen. Zeige, dass  $\text{Aut}(A)$  eine lineare algebraische Gruppe ist. Sei nun  $A$  die 2-dimensionale Algebra aufgespannt von  $e$  und  $a$  mit Multiplikation festgelegt durch

$$e^2 = e, ae = ea = a \text{ und } a^2 = 0.$$

Bestimme die Matrixgruppe zu  $\text{Aut}(A)$  bezüglich der Basis  $e, a$ .