

**AUFGABEN ZUR EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRAISCHE  
GRUPPENTHEORIE, BLATT 13**

JAN DRAISMA

ABGABE BIS ZUM 9. FEBRUAR

- (1) Seien  $V_1, V_2, \dots, V_l$  endlich-dimensionale Vektorräume. Zeige, dass
- $$\{v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_l \mid v_i \in V_i \text{ für alle } i = 1, \dots, l\}$$
- ein abgeschlossener Kegel in  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_l$  ist.
- (2) Sei  $B := B_n \cap \mathrm{SL}_n$  die Untergruppe von  $\mathrm{SL}_n$  bestehende aus Oberdreiecksmatrizen
- Zeige, dass  $B$  eine Borel-Untergruppe von  $\mathrm{SL}_n$  ist.
  - Bestimme die (eindeutige)  $B$ -stabile Gerade  $l$  in der adjungierten Darstellung  $\mathrm{Ad} : \mathrm{SL}_n \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_n)$ .
  - Sei  $M$  eine Matrix in  $l$ . Was ist die  $\mathrm{SL}_n$ -Bahn von  $M$  in  $\mathfrak{sl}_n$ ?
- (3) Sei  $B := B_n \cap \mathrm{SO}_n$  die Untergruppe von  $\mathrm{SO}_n$  bestehende aus Oberdreiecksmatrizen; hier ist  $\mathrm{SO}_n$  bezüglich der symmetrischen Bilinearform  $\beta(x, y) := \sum_i x_i y_{n+1-i}$  definiert.
- Überlege, dass falls eine Fahne

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_l \subsetneq K^n$$

stabil unter einem  $g \in G$  ist, die Fahne der Orthogonalkomplemente

$$0 \subsetneq V_l^\perp \subsetneq \dots \subsetneq V_2^\perp \subsetneq V_1^\perp \subsetneq K^n$$

(bezüglich  $\beta$ ) auch  $g$ -stabil ist.

- Zeige, dass  $B$  der Stabilisator in  $\mathrm{SO}_n$  von einer Fahne

$$0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_k \subsetneq K^n$$

*isotroper* Unterräumen  $V_i$  ist. Hier ist  $k := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , und ein Unterraum  $W$  von  $K^n$  heisst *isotrop*, falls die Einschränkung von  $\beta$  auf  $W \times W$  null ist.

- Zeige, dass jede abgeschlossene, auflösbare, zusammenhängende Untergruppe  $H$  von  $\mathrm{SO}_n$  eine Fahne von  $k$  isotropen Unterräumen stabilisiert. Hinweis: Gehe mit Induktion nach  $n$  vor. Überlege zuerst, dass es für  $n > 1$  eine isotrope,  $H$ -stabile Gerade  $Kv$  gibt, und betrachte dann das Bild von  $H$  in  $\mathrm{SO}(v^\perp/Kv) = \mathrm{SO}_{n-2}$ .
  - Überlege, dass  $\mathrm{SO}_n$  transitiv auf der Menge der Menge aller Fahnen von  $k$  isotropen Unterräumen operiert, und schliesse daraus, dass  $B$  eine Borel-Untergruppe von  $\mathrm{SO}_n$  ist.
- (4) Finde eine endliche, auflösbare Untergruppe von  $\mathrm{GL}_2$  über  $\mathbb{C}$ , die nicht konjugiert zu einer Untergruppe von  $B_2$  ist. Kolchins Satz stimmt also nicht für unzusammenhängende Gruppen!