

**AUFGABEN ZUR EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRAISCHE
GRUPPENTHEORIE, BLATT 9**

JAN DRAISMA

ABGABE BIS ZUM 12. JANUAR

- (1) Nehme an, die algebraische Gruppe G operiert algebraisch auf einer affinen Varietät X , und sei $x \in X$. Zeige, dass $\dim G = \dim G_x + \dim \overline{Gx}$. Hinweis: benutze den dominanten Morphismus $\alpha_x : G \rightarrow \overline{Gx}$, $g \mapsto gx$ und einen Satz über Faserdimensionen.
- (2) Bestimme die Lie-algebra $L(G)$, wo $G = T_n$ (invertierbare Diagonalmatrizen), $G = B_n$ (invertierbare Oberdreiecksmatrizen), $G = U_n$ (invertierbare Oberdreiecksmatrizen mit 1-en auf der Diagonale), und $G = \mathrm{Sp}_{2m} = \{g \in \mathrm{GL}_{2m} \mid g^t J g = J\}$, wo J eine feste invertierbare schiefsymmetrische Matrix ist. Hinweis für Sp_{2m} : bestimme zuerst die Dimension von Sp_{2m} mit Hilfe von Aufgabe 1 und der Operation von GL_n auf schiefsymmetrischen Matrizen gegeben durch $\alpha(g, A) = (g^t)^{-1} A g^{-1}$.
- (3) Sei A eine endlich-dimensionale Algebra (ein Vektorraum mit einer bilinearen Verknüpfung $A \times A \rightarrow A$), und sei $G \subseteq \mathrm{GL}(A)$ ihre Automorphismengruppe. Zeige, dass $L(G)$ in der Lie-algebra $\mathrm{Der}(A)$ der Derivationen auf A enthalten ist.
- (4) Sei $A \in M_n$ mit $A^d = 0$ und nehme an, dass $\mathrm{char} K = 0$ oder $\mathrm{char} K \geq d$. Zeige, dass

$$\phi_A : K \rightarrow \mathrm{GL}_n, t \mapsto \exp(tA) := I + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 + \dots + \frac{t^{d-1}}{(d-1)!} A^{d-1}$$

ein Homomorphismus algebraischer Gruppen ist. Zeige, dass $(d_e \phi_A)1 = A$ (hier haben wir $T_0 K$ wie üblich mit K identifiziert).

- (5) Bestimme das Bild von ϕ_A aus Aufgabe 4 für $A = E_{i,j}$ mit $i < j$ und $d = 2$, und für $A = E_{i,j} - E_{n+1-j, n+1-i}$ mit $i < j$. Im letzten Fall kann man $d = 2$ wählen, ausser wenn $2j = n + 1$ oder $2i = n + 1$; behandle die Fälle separat. Woher kennen wir die Gruppen $\phi_A(K)$ schon?