

Algebraische Gruppen, Basel, WS 2004/2005

Jan Draisma

Lineare algebraische Gruppen: Definition und Beispiele

1. Die Zariski-Topologie auf $\text{End}(V)$ und M_n

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper—vorläufig noch von beliebiger Charakteristik—und sei V ein Vektorraum über K von endlicher Dimension $n > 0$. Schreibe $\text{End}(V)$ für den K -Vektorraum aller K -linearen Abbildungen $V \rightarrow V$ und $\mathcal{O}(\text{End}(V))$ für die K -algebra der *polynomialen Funktionen* auf $\text{End}(V)$, d.h. für die kommutative K -algebra die von den K -linearen Funktionen $\text{End}(V) \rightarrow K$ erzeugt wird.

DEFINITION 1.1. Für eine Teilmenge F von $\mathcal{O}(\text{End}(V))$ nennen wir das *Nullstellengebilde* $\{A \in \text{End}(V) \mid f(A) = 0 \text{ für alle } f \in F\}$ eine (*Zariski-*)*abgeschlossene* Teilmenge von $\text{End}(V)$.

Diese Mengen bilden tatsächlich die abgeschlossene Menge einer Topologie auf $\text{End}(V)$, die *Zariski-Topologie*.

Die Wahl einer Basis in V definiert einen Isomorphismus zwischen $\text{End}(V)$ und dem K -Vektorraum M_n von $n \times n$ -Matrizen. Die polynomialen Funktionen auf V entsprechen unter diesem Isomorphismus den Polynomen über K in den Matrixeinträgen x_{11}, \dots, x_{nn} . Bemerke nämlich, dass zwei Polynome nur dann die gleiche Funktion definieren, wenn sie gleich sind—hier benutzen wir, dass K unendlich ist!

2. Lineare algebraische Gruppen und algebraische Matrixgruppen

DEFINITION 2.1. Eine *lineare algebraische Gruppe* ist eine Zariski-abgeschlossene Teilmenge von $\text{End}(V)$, die ausserdem eine Gruppe bezüglich der Zusammensetzung von Abbildungen ist. Ist G eine lineare algebraische Gruppe, und bilden v_1, \dots, v_n eine Basis von V , so heisst das Bild von G unter $\text{End}(V) \rightarrow M_n(K)$ eine *algebraische Matrixgruppe*.

Die Gruppenoperation einer algebraischen Matrixgruppe ist natürlich die Matrixmultiplikation.

Ist $G \subseteq \text{End}(V)$ eine lineare algebraische Gruppe, so induziert die Zariski-Topologie auf $\text{End}(V)$ eine Topologie auf G , die *Zariski-Topologie auf G* .

3. Beispiele

- (1) $\text{SL}(V) := \{A \in \text{End}(V) \mid \det A = 1\}$ ist das Nullstellengebilde des Polynoms $\det - 1$, und man überprüft leicht, dass es eine Gruppe ist. Die entsprechende Matrixgruppe wird mit SL_n bezeichnet, und besteht aus allen Matrizen mit Determinante 1.

- (2) $U_n^- := \{A \in M_n(K) \mid A_{i,i} = 1 \text{ und } A_{i,j} = 0 \text{ für } i < j\}$ besteht aus den Unterdreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale.
- (3) Hier setzen wir voraus, dass $\text{char } K \neq 2$ ist; in Charakteristik 2 werden orthogonale Gruppen anders definiert. Sei $\beta : V \times V \rightarrow K$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V , und definiere die *orthogonale Gruppe zu β* durch

$$O(\beta) := \{A \in \text{End}(V) \mid \beta(Av, Aw) = \beta(v, w) \text{ für alle } v, w \in V\}.$$

Da β ein Polynom auf $V \times V$ ist, ist für jedes feste Paar $v, w \in V$ die Abbildung $A \mapsto \beta(Av, Aw) - \beta(v, w)$ ein Polynom auf $\text{End}(V)$; $O(\beta)$ ist das Nullstellengebilde aller dieser Polynome. Diese Zariski-abgeschlossene Menge ist offensichtlich abgeschlossen unter Zusammensetzung linearer Abbildungen; um zu zeigen, dass $O(\beta)$ eine lineare algebraische Gruppe ist, reicht es also, zu zeigen, dass jedes $A \in O(\beta)$ invertierbar ist und sein Inverse in $O(\beta)$ hat. Das erste folgt leicht aus der Tatsache, dass β nicht ausgeartet ist, und das zweite ist dann auch klar.

Um die zugehörige Matrixgruppe zu finden, wählen wir einen linearen Isomorphismus $\phi : K^n \rightarrow V$. Dann gibt es eine eindeutige symmetrische Matrix $B \in M_n(K)$ mit

$$x^T B y = \beta(\phi(x), \phi(y)) \text{ für alle } x, y \in K^n$$

(nämlich die *Gram-Matrix* $B = (\beta(\phi(e_i), \phi(e_j)))$ der Form) und die zu $O(\beta)$ gehörende Matrixgruppe ist nun

$$O_n := \{A \in M_n(K) \mid A^T B A = B\}.$$

Hier ist vielleicht noch klarer, dass diese Gruppe durch polynomiale Gleichungen in den Einträgen definiert wird.

Die Notation O_n ist nicht so genau, da diese Gruppe ja noch von B abhängt. Allerdings kann man ϕ immer so wählen, dass B gleich einer vorgeschriebenen symmetrischen, invertierbaren Matrix ist. Um zum Beispiel $B = I$ zu erreichen, geht man wie folgt vor: da $\text{char } K \neq 2$ ist, ist $v \mapsto \beta(v, v)$ nicht identisch null (sonst wäre β symmetrisch und schiefsymmetrisch, also null, also ausgeartet). Also gibt es ein v'_1 mit $\beta(v'_1, v'_1) =: c \neq 0$. Sei b eine Quadratwurzel von c in K und setze $v_1 := \frac{1}{b}v'_1$. Dann gilt $\beta(v_1, v_1) = 1$ und wir haben unseren ersten Basisvektor gefunden. Es gilt $V = K v_1 \oplus v_1^\perp$ und die Einschränkung von β auf v_1^\perp ist wieder nicht-ausgeartet, also gibt es nach Induktion v_2, \dots, v_n mit $(v_i, v_j) = \delta_{i,j}$ für alle $i, j > 1$. Aber dann gilt dies auch für i und/oder j gleich 1. Mit $\phi(e_i) := v_i$ finden wir jetzt den gewünschten Isomorphismus.

Dies rechtfertigt die Notation O_n , ohne Verweisung auf die definierende Form. Oft wird $B = I$ gewählt, oft aber auch $B = (\delta_{i, n+1-j})_{i,j}$ —in der zweiten Form ist es z.B. klar, dass es $\lfloor n/2 \rfloor$ -dimensionale Räume gibt, auf denen die Form identisch null ist.

- (4) $SO(\beta)$ ist der Durchschnitt von $O(\beta)$ mit $SL(V)$, und die zugehörige Matrixgruppe SO_n der Durchschnitt von O_n mit SL_n .
- (5) Sei nun β eine nicht-ausgeartete *schiefsymmetrische* Bilinearform auf V , d.h. eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf V mit $\beta(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Bemerke, dass daraus folgt, dass $\beta(v, w) = -\beta(w, v)$ für alle $v, w \in V$;

die Umkehrung gilt nur wenn $\text{char } K \neq 2$. Die *symplektische Gruppe* zu β ist nun

$$\text{Sp}(\beta) := \{A \in \text{End}(V) \mid \beta(Av, Aw) = \beta(v, w) \text{ für alle } v, w \in V\}.$$

Um die entsprechende Matrixgruppe zu finden, gehen wir vor wie bei der orthogonalen Gruppe: erstens muss $n = 2m$ gerade sein, damit es überhaupt eine nicht-ausgeartete schiefsymmetrische Form auf V gibt, und wenn B die Gram-Matrix der Form β bezüglich einer Basis von V ist, so ist B eine invertierbare schiefsymmetrische Matrix, und

$$\text{Sp}_{2m} := \{A \in M_n(K) \mid A^T B A = B\}$$

ist die zu $\text{Sp}(\beta)$ gehörende Matrixgruppe.

Wieder kann man diese Notation rechtfertigen, indem man zeigt, dass B immer gleich einer *bestimmten* schiefsymmetrischen, invertierbaren Matrix gewählt werden kann—oft $B = (\delta_{i,j-m} - \delta_{i-m,j})_{i,j}$ oder

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1, & i + j = n + 1 \text{ und } i \leq m, \\ -1, & i + j = n + 1 \text{ und } i > m \text{ und} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Gruppe $\text{Sp}(\beta)$ liegt in $\text{SL}(V)$, wie wir bald sehen werden.

- (6) $\text{GL}(V)$, die Gruppe aller invertierbaren Elementen in $\text{End}(V)$, ist nicht Zariski-abgeschlossen. Allerdings gibt es schon eine zu $\text{GL}(V)$ isomorphe algebraische Matrixgruppe in $M_{n+1}(K)$, nämlich

$$\left\{ \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & c \end{array} \right] \mid A \in M_n(K) \text{ and } (\det A) \cdot c = 1 \right\};$$

dies gibt $\text{GL}(V)$ die Struktur einer linearen algebraischen Gruppe.

- (7) Die *multiplikative Gruppe* $G_m = (K^*, \cdot)$ ist einfach GL_1 , mit der oben definierten Struktur einer algebraischen Matrixgruppe.
 (8) Die *additive Gruppe* $G_a = (K, +)$ erhält die Struktur einer algebraischen Matrixgruppe durch die Einbettung

$$K \rightarrow M_2(K), \quad a \mapsto \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (9) B_n ist der Durchschnitt von GL_n mit der Menge aller Oberdreiecksmatrizen.
 (10) T_n ist der Durchschnitt von GL_n mit der Menge der Diagonalmatrizen.

Die Gruppen $\text{GL}(V)$, $\text{SL}(V)$, $(\text{S})\text{O}_n$ und Sp_{2n} , oder eng damit verbundene Gruppen, werden die *klassischen algebraischen Gruppen* genannt.