

Algebraische Gruppen, Basel, WS 2004/2005

Jan Draisma

Maximale Tori

Nun, da wir wissen, dass Borel-Untergruppen alle zueinander konjugiert sind, beweisen wir, dass in einer zusammenhängenden, auflösbaren algebraischen Gruppe alle maximalen Tori zueinander konjugiert sind. Es folgt dann aus diesen beiden Tatsachen, dass in einer beliebigen algebraischen Gruppe alle maximalen Tori zueinander konjugiert sind. Der Beweis den wir hier behandeln ist ziemlich effizient, funktioniert aber leider nur in Charakteristik 0.

DEFINITION 0.22. Sei G eine algebraische Gruppe. Ein *maximaler Torus* in G ist eine abgeschlossene Untergruppe, die ein Torus is—also isomorph zu einem T_n —und die nicht enthalten ist in einem echt grösseren Torus in G .

Sei nun G eine zusammenhängende, auflösbare, algebraische Gruppe. Nach Kolchins Satz können wir ohne Einschränkung annehmen, dass G eine abgeschlossene Untergruppe von B_n , der Gruppe der invertierbaren Oberdreiecksmatrizen, ist. Bemerke, dass in diesem Fall G_u , die Menge der unipotenten Elemente in G , gleich $G \cap U_n$ ist, wo U_n aus den Oberdreiecksmatrizen mit nur 1-en auf der Diagonale besteht. Ist also π der Homomorphismus $B_n \rightarrow T_n$, der eine Oberdreiecksmatrix auf ihre Diagonale abbildet, so ist G_u der Kern von $\pi|_G$ und somit eine normale Untergruppe von G . Setze

$$r := \dim G - \dim G_u = \dim \pi(G)$$

(die Gleichheit folgt sofort aus dem Satz über Faserdimensionen dominanter Morphismen). Bemerke, dass $\pi(G)$ als abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe von T_n ein Torus ist. Wir werden sehen, dass die maximalen Tori in G alle Dimension r haben.

Zunächst zeigen wir aber nur, dass r eine obere Schranke ist. Sei nämlich T ein Torus in G . Aus $T \cap G_u = \{I\}$ (ein Torus besteht nur aus diagonalisierbaren Elementen) folgt, dass π den Torus T injektiv in den Torus $\pi(G)$ abbildet. Also ist $\dim T \leq \dim \pi(G) = r$, und wenn Gleichheit gilt, dann wird T surjektiv auf $\pi(G)$ abgebildet.

THEOREM 0.23. *In der oben eingeführten Notation gelten folgende Aussagen.*

- (1) G enthält einen Torus von Dimension r .
- (2) Alle Tori in G von Dimension r sind zueinander konjugiert unter G_u .
- (3) Jedes diagonalisierbare Element von G liegt in einem Torus in G von Dimension r .
- (4) Jeder Torus in G ist in einem Torus in G von Dimension r enthalten.
- (5) Alle maximalen Tori in G sind zueinander konjugiert unter G_u .

Dieser Satz ist in allgemeiner Charakteristik gültig. Allerdings kennt der Beweis in positiver Charakteristik ziemlich viel technische Einzelheiten, also *beschränken*

wir uns ab jetzt auf den Fall $\text{char } K = 0$. Dann kann man mit folgenden Lemmas den Satz effizient beweisen.

LEMMA 0.24. *Ist $\text{char } K = 0$, so gibt es in jedem torus T ein Element $t \in T$ mit der Eigenschaft, dass $T = \langle t \rangle$, wo $\langle t \rangle = \{t^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ die von t erzeugte Untergruppe ist.*

BEWEIS. Sei $T = T_m$. Wähle m verschiedene Primzahlen $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{N} \subseteq K$ und setze $t := \text{diag}(p_1, \dots, p_m)$. Da jede abgeschlossene Untergruppe von T_m der Durchschnitt von Kernen von Charakteren in $X(T_m)$ ist (das war eine Aufgabe), müssen wir nur zeigen, dass kein nicht-trivialer Charakter auf t den Wert 1 annimmt. Ein Charakter $\chi \in X(T_m)$ hat auf t den Wert

$$\chi(t) = \prod_{i=1}^m p_i^{a_i},$$

wo $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$. Aber wegen der Wahl der p_i ist die rechte Seite nur dann 1, wenn alle a_i null sind—also wenn χ trivial ist. \square

Der Kern des Beweises vom Satz ist folgendes Lemma über Konjugiertheit.

LEMMA 0.25. *Ist $\text{char } K = 0$ und sind $g, h \in B_n$ diagonalisierbare Matrizen mit $\pi(g) = \pi(h)$ (das heisst, mit der gleichen Diagonale), so gibt es ein $u \in \langle \langle g, h \rangle \rangle_u$ mit $uhu^{-1} = g$.*

BEWEIS. Überlege zuerst, dass unter den Voraussetzungen $g, h, \pi(g) = \pi(h)$ alle unter U_n zueinander konjugiert sind: ist $\pi(g) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, so gibt es nämlich eine Basis von Eigenvektoren von g von der Gestalt e_1 (bei Eigenwert λ_1), $e_2 + \alpha e_1$ (bei Eigenwert λ_2), $e_3 + \beta e_2 + \gamma e_1$ (bei Eigenwert λ_3), usw. Ist nun b die Matrix, deren Spalten diese Eigenvektoren sind, so ist $b^{-1}gb = \pi(g)$.

Wenn das Lemma für $b^{-1}gb$ und $b^{-1}hb$ stimmt, so folgt das Lemma für g und h indem man wieder mit b konjugiert. Also dürfen wir annehmen, dass g eine Diagonalmatrix ist. Jetzt gehen wir mit Induktion nach n vor: für $n = 1$ ist $g = h$ und tut $1 \in \langle \langle g, h \rangle \rangle_u$ es. Nehme nun an, dass das Lemma stimmt für $n - 1$, und seien $g, h \in B_n$ mit g diagonal, h diagonalisierbar und $\pi(h) = g$. Sei weiter $H = \langle g, h \rangle$ der Abschluss der von g, h erzeugte Gruppe.

Sei $\sigma : B_n \rightarrow B_{n-1}$ der Homomorphismus algebraischer Gruppen, der eine Matrix auf ihren $(n - 1) \times (n - 1)$ -Block linksoben schiebt. Dann ist $\sigma(g)$ eine Diagonalmatrix und $\sigma(h)$ eine diagonalisierbare Matrix mit Diagonale $\sigma(g)$ (es gibt ein $a \in U_n$ mit $aha^{-1} = g$, und dann folgt $\sigma(a)\sigma(h)\sigma(a)^{-1} = \sigma(g)$). Also gibt es Nach Voraussetzung ein unipotentes $\bar{v} \in \langle \sigma(g), \sigma(h) \rangle =: \bar{H}$ mit $\bar{v}\sigma(h)\bar{v}^{-1} = \sigma(g)$. Aber \bar{H} ist gerade das Bild von H unter σ (verifiziere dies!), also gibt es ein $v \in H_u$ mit $\sigma(v) = \bar{v}$. Nun hat vhv^{-1} folgende Gestalt:

$$vhv^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{n-1} & a_{n-1} \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} =: h_1,$$

wo die leeren Einträge null sind. Wir werden sehen, wie man die Einträge a_1, \dots, a_{n-1} von h_1 der Reihe nach löschen kann durch Konjugation mit Elementen u_1, \dots, u_{n-1} von H_u . Dann folgt, dass

$$u_{n-1} \cdots u_1 v h v^{-1} u_1^{-1} \cdots u_{n-1}^{-1} = g,$$

wie behauptet. Den Eintrag a_1 löschen geht wie folgt: wenn $a_1 = 0$, so genügt $u_1 = 1$. Nehme also an, dass $a_1 \neq 0$ ist. Weil h_1 nach Voraussetzung diagonalisierbar ist, folgt dann $\lambda_n \neq \lambda_1$ (sonst wäre a_1 ein nicht zu löschender Eintrag aus einem Jordan-Kästchen zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_n$; überlege dies!). Betrachte nun die Potenzen

$$(g^{-1}h_1)^k = \begin{bmatrix} 1 & & & k \frac{a_1}{\lambda_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & k \frac{a_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Da wir in Charakteristik 0 sind und $a_1 \neq 0$ ist, sind diese Potenzen paarweise verschiedene Elemente von H . Schreibe, für $t \in K$,

$$X(t) := \begin{bmatrix} 1 & & & t \frac{a_1}{\lambda_1} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & t \frac{a_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Der Durchschnitt von H mit der, zur additiven Gruppe isomorphe, algebraischen Gruppe $\{X(t) \mid t \in K\}$ enthält unendlich viele Punkte und ist abgeschlossen—also folgt $X(t) \in H$ für alle $t \in K$. Nun rechnet man aus, dass der Eintrag an der Stelle $(1, n)$ von $X(t)h_1X(t)^{-1} = X(t)h_1X(-t)$ gleich $a_1(1 + t(\frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_1}))$ ist. Wählt man also

$$t_1 := \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_n} \quad \text{und} \quad u_1 := X(t_1) \in H_u,$$

so ist in $h_2 := u_1h_1u_1^{-1}$ der Eintrag a_1 gelöscht worden. Die anderen Einträge lassen sich genauso löschen, und damit ist das Lemma bewiesen. \square

Wir können jetzt die ersten 3 Teile vom Satz beweisen.

BEWEIS VON (1)-(3) DES SATZES, IN CHARAKTERISTIK 0.

- (1) Sei $t \in \pi(G)$ ein Element mit $\overline{\langle t \rangle} = \pi(G)$ (siehe Lemma 0.24) und sei $g \in G$ mit $\pi(g) = t$. Dann folgt $\pi(g_d) = \pi(g)_d = t$, also können wir, indem wir g durch g_d ersetzen, annehmen, dass g diagonalisierbar ist. Aber dann ist g unter U_n zu $\pi(g)$ konjugiert, also ist die Gruppe $T := \overline{\langle g \rangle} \subseteq G$ unter U_n zu $\pi(G)$ konjugiert, und somit ein r -dimensionaler Torus.
- (2) Sei S ein zweiter r -dimensionaler Torus. Dann wird S von π surjektiv auf $\pi(G)$ abgebildet; es gibt also ein $h \in \pi^{-1}(t) \cap S$, mit t wie vorher. Sind g und T wie vorher, so sind g, h beide diagonalisierbar, und $\pi(g) = t = \pi(h)$. Nach Lemma 0.25 gibt es also ein unipotentes $u \in \overline{\langle g, h \rangle} \subseteq G$ mit $uhu^{-1} = g$. Aber dann konjugiert u den ‘von h topologisch erzeugten’ Torus S auch in den ‘von g topologisch erzeugten’ Torus T .
- (3) Sei $l \in G$ diagonalisierbar und T ein r -dimensionaler Torus in G wie vorher. Dann gibt es ein $l' \in \pi^{-1}(\pi(l)) \cap T$. Nun sind l und l' diagonalisierbar und haben die gleiche Diagonale. Also gibt es nach Lemma 0.25 ein $u \in G_u$ mit $ul'u^{-1} = l$. Aber dann liegt l im r -dimensionalen Torus $uTu^{-1} \subseteq G$.

\square

Für die letzten zwei Aussagen vom Satz brauchen wir noch ein weiteres Lemma; die Notation ist wie bisher.

- LEMMA 0.26. (1) Für jeden r -dimensionalen Torus T in G gilt $G = TG_u$.
 (2) Für jedes diagonalisierbare Element $s \in G$ ist der Zentralisator $Z_G(s) := \{g \in G \mid gs = sg\}$ zusammenhängend.

Bemerke, dass wir schon lange wissen, dass $Z_G(s)$ auch abgeschlossen ist.

BEWEIS.

- (1) Der Homomorphismus $\pi|_T : T \rightarrow \pi(G)$ ist ein bijektiver Homomorphismus algebraischer Gruppen. Für jedes $g \in G$ ist nun

$$t := (\pi|_T)^{-1}(\pi(g)) \in T \text{ und } u := t^{-1}g \in G_u$$

und es folgt $g = tu \in TG_u$.

- (2) Sei T ein r -dimensionaler Torus in G , der s enthält. (So ein Torus gibt es nach Teil (3) vom Satz.) Ist nun $g \in Z_G(s)$ und schreibt man $g = tu$ mit $t \in T$ und $u \in G_u$, so vertauscht t mit s —da beide im Torus T liegen—und somit vertauscht auch u mit s . Also gilt: $Z_G(s) = TZ_{G_u}(s)$. Die Gruppe $Z_{G_u}(s)$ ist unipotent, und somit zusammenhängend, da wir in Charakteristik 0 sind (siehe das Kapitel über unipotente Gruppen). Also ist auch $Z_G(s)$, als Bild von $T \times Z_{G_u}(s)$ unter Multiplikation, zusammenhängend. \square

BEWEIS VON (4) UND (5) DES SATZES, IN CHARAKTERISTIK 0.

- (4) Wir gehen mit Induktion nach $\dim G$ vor: nehme an, dass jeder Torus in einer auflösbaren, zusammenhängenden algebraischen Gruppe G' mit $\dim G' < \dim G$ in einem Torus in G' von Dimension $\dim G' - \dim(G')_u$ enthalten ist. Wir zeigen, dass dies dann auch für G der Fall ist.

Sei also S ein Torus in G , der ganz aus diagonalisierbaren Elementen besteht. Es gibt nun zwei Fälle: S liegt im Zentrum von G oder nicht. Nehme zunächst an, dass S im Zentrum von G liegt, und sei T ein Torus von Dimension r in G . Dann ist die Multiplikation $S \times T \rightarrow G$, $(s, t) \mapsto st$ ein Homomorphismus algebraischer Gruppen (weil $(s_1 t_1)(s_2 t_2) = (s_1 s_2)(t_1 t_2)$), und dessen Bild ST ein Torus in G . Aber T hat die maximale Dimension eines Torus in G , also folgt $ST = T$ und $S \subseteq T$.

Ist S nicht Zentral, so wähle ein $s \in S$ das nicht im Zentrum von G liegt. Wähle weiter einen r -dimensionalen Torus T in G , der s enthält. Nun ist $G' := Z_G(s)$ eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von G (Lemma 0.26), die ausserdem S und T enthält. Aus $T \subseteq G'$ folgt, dass die maximale Dimension $(\dim(G') - \dim(G')_u)$ eines Torus in G' immer noch r ist (und nicht kleiner). Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es einen r -dimensionalen Torus T' in $G' \subseteq G$, der S enthält, und damit ist der Beweis fertig.

- (5) Dies folgt sofort aus (4) und (2). \square

COROLLARY 0.27. Sei G eine beliebige algebraische Gruppe. Dann sind die maximalen Tori in G alle zueinander konjugiert.

BEWEIS. Seien T, T' maximale Tori in G . Da sie auflösbar und zusammenhängend sind, gibt es Borel-Untergruppe B, B' von G , die T bzw. T' enthalten. Borel-Untergruppen sind zueinander konjugiert (siehe das Kapitel über Borel-Untergruppen), also gibt es ein $g \in G$ mit $gBg^{-1} = B'$. Dann sind T' und gTg^{-1} maximale Tori

in B' (wenn nicht, dann gäbe es natürlich auch in G grössere Tori). Da B' zusammenhängend und auflösbar ist, gibt es ein nach dem Satz ein (unipotentes) $b' \in B'$ mit $b'gTg^{-1}(b')^{-1} = T$. \square

Dieses Korollar ist die Basis für die *Darstellungstheorie algebraischer Gruppen*: zu einer endlich-dimensionalen, rationalen Darstellung $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ bildet man kombinatorische Data wie folgt. Wähle einen maximalen Torus T in G und betrachte V zunächst nur als T -modul. Da T ein Torus ist, kann man V in Gewichtsräume zerlegen:

$$V = \bigoplus_{\chi \in X(T)} V_{\chi}.$$

Die Abbildung $f_{\rho,T} : X(T) \rightarrow \mathbb{N}, \chi \mapsto \dim V_{\chi}$ beschreibt nun V als Darstellung von T bis auf Isomorphie, wie wir gesehen haben im Kapitel über diagonalisierbare Gruppen.

Da aber alle maximalen Tori konjugiert sind, ist $f_{\rho,T}$ *unabhängig von der Wahl von T* in folgendem Sinn: ist T' ein zweiter maximaler Torus in G , dann gibt es ein $g \in G$ mit $gTg^{-1} = T'$, und dann ist $f_{\rho,T'}(\chi') = f_{\rho,T}(t \mapsto \chi'(gtg^{-1}))$. Es stellt sich heraus, dass die Abbildung $f_{\rho,T}$ sehr viel Information über V als Darstellung von G enthält; sie wird deshalb manchmal den *Charakter der G -Darstellung V* genannt. Für gewisse Gruppen (z.B. die klassischen Gruppen $\mathrm{GL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{SO}_n, \mathrm{Sp}_{2m}$ in Charakteristik 0) *wird ρ bis auf Isomorphie von G -Darstellungen eindeutig bestimmt durch $f_{\rho,T}$* . Um herauszufinden, welche Funktionen $X(T) \rightarrow \mathbb{N}$ tatsächlich Charaktere von Darstellungen sind, verwendet man (sicher in Charakteristik 0) vor allem die Darstellungstheorie von Lie-Algebren: das Differential $d_e \rho$ ist nämlich eine Darstellung von $L(G)$. Kann man nun alle Darstellungen von $L(G)$ klassifizieren—und das kann man für die erwähnten Gruppen—und weiss man auch, welche von denen zu Darstellungen von G 'integrieren', dann hat man alle rationale, endlich-dimensionale Darstellungen von G klassifiziert. Die Struktur- und Darstellungstheorie von Lie-Algebren formen das Thema der Vorlesung von Philippe Bonnet im nächsten Semester.