Algebraische Gruppen, Basel, WS 2004/2005

Jan Draisma

KAPITEL 9

Etwas multilineare Algebra

Für die Definition vom Tensorprodukt $V \otimes W$ zweier Vektorräume und von der Wedgepotenz $\bigwedge^d V$ eines Vektorraums verweise ich auf die standard Lehrbücher. In diesem kurzen Kapitel möchten wir nur etwas Resultate sammeln, die uns bei der Entwickelung der Strukturtheorie algebraischer Gruppen hilfreich sein werden.

Lemma 0.15. *Seien $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ und $\sigma : G \to \mathrm{GL}(W)$ endlich-dimensionale rationale Darstellungen einer algebraischen Gruppe G. Dann sind auch $\rho \otimes \sigma : G \to \mathrm{GL}(V \otimes W)$ definiert durch*

$$(\rho \otimes \sigma)(g) := \rho(g) \otimes \sigma(g)$$

und, für jede natürliche Zahl $d \in \mathbb{N}$, $\bigwedge^d \rho : G \to \mathrm{GL}(\bigwedge^d V)$ definiert durch

$$(\bigwedge^d \rho)(g) := \bigwedge^d (\rho(g))$$

endlich-dimensionale, rationale Darstellungen von G.

In diesem Lemma ist, für $A \in \mathrm{End}(V)$ und $B \in \mathrm{End}(W)$, die lineare Abbildung $A \otimes B$ festgelegt durch

$$(A \otimes B)(v \otimes w) = Av \otimes Aw$$

und die lineare Abbildung $\bigwedge^d A$ festgelegt durch

$$(\bigwedge^d A)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) = Av_1 \wedge \ldots \wedge Av_d.$$

Bemerke, dass diese Definitionen sinnvoll sind dank der universellen Eigenschaften von Tensorprodukt und Wedgepotenz: der Ausdruck $Av \otimes Aw$ ist bilinear in v und w und $Av_1 \wedge \ldots \wedge Av_d$ ist multilinear und alternierend in $v_1, \ldots, v_d$.

Beweis. Dass $\rho \otimes \sigma$ und $\bigwedge^d \rho$ Gruppenhomomorphismen sind, ist klar aus den Definitionen. Also müssen wir nur überprüfen, dass die Einträge der Matrizen von $(\rho \otimes \sigma)(g)$ und $(\bigwedge^d \rho)(g)$ bezüglich geeigneten Basen reguläre Funktionen in g sind. Ist nun $\{v_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von V und $\{w_k\}_k$ eine Basis von W, dann ist $\{v_i \otimes w_k\}_{i,k}$ eine Basis von $V \otimes W$ und die Matrix von $(\rho \otimes \sigma)(g)$ bezüglich dieser Basis hat die Einträge

$$(\rho \otimes \sigma)(g)_{ik,jl} = \rho(g)_{ij} \sigma(g)_{kl};$$

wo $\rho(g)_{ij}$ und $\sigma(g)_{kl}$ die Einträge von $\rho(g)$ und $\sigma(g)$ bezüglich den gegebenen Basen von V bzw. W sind—und da die nach Voraussetzung regulär auf G sind, sind die Einträge von $(\rho \otimes \sigma)(g)$ es auch.

Weiter ist $\{v_I\}_I$, wo I die Menge aller Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ mit d Elementen durchläuft und v_I definiert ist durch

$$v_I := v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_d},\ I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_d\},$$

eine Basis von $\bigwedge^d V$. Bezüglich dieser Basis ist der Einträg $(\bigwedge^d \rho(g))_{IJ}$ eine alternierende Summe von Produkten von der Gestalt

$$\prod_{j \in J} \rho(g)_{\pi(j),j},$$

wo $\pi : J \to I$ eine Bijektion ist—also ist auch dieser Eintrag regulär. □

Lemma 0.16. *Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume und $d \in \mathbb{N}$. Dann gibt es*

(1) *einen natürlichen Isomorphismus $V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ gegeben durch*

$$(\xi \otimes w)v = \xi(v)w, \xi \in V^*, w \in W, v \in V.$$

(2) *einen natürlichen Isomorphismus $V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ definiert durch*

$$(\xi \otimes \eta)(v \otimes w) := \xi(v)\eta(w),\ f \in V^*, g \in W^*, v \in V, w \in W.$$

(3) *einen natürlichen Isomorphismus $\bigwedge^d(V^*) \cong (\bigwedge^d V)^*$ gegeben durch*

$$(\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_d)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_d) := \sum_{\pi \in S_d} \mathrm{sgn}\,(\pi) \prod_i \xi_i(v_{\pi(i)}),\ \xi_i \in V^*, v_i \in V$$

(4) *einen bis auf einen Skalar natürlichen Isomorphismus $(\bigwedge^d V) \cong (\bigwedge^{n-d} V)^*$ definiert wie folgt: sei ξ ein Vektor der den 1-dimensionalen Raum $(\bigwedge^n V)^*$ aufspannt. Dann definiert jedes $\omega_d \in \bigwedge^d V$ eine lineare Funktion*

$$\omega_{n-d} \mapsto \xi(\omega_d \wedge \omega_{n-d})$$

auf $\bigwedge^{n-d} V$.

Beweis. (1) Aufgabe. Bemerke, dass das Bild von ‘reinen’ Tensoren $\xi \otimes w$ gerade die linearen Abbildungen $V \to W$ vom Rang 1 sind.

(2) Seien $\{v_i\}_i$ und $\{w_k\}_k$ Basen von V bzw. W und $\{\xi_i\}_i$ und $\{\eta_k\}_k$ die dualen Basen von V^* und W^*. Dann wird die Basis $\{\xi_i \otimes \eta_k\}_{i,k}$ von $V^* \otimes W^*$ auf die Basis von $(V \otimes W)^*$ dual zur Basis $\{v_i \otimes w_k\}_{i,k}$ von $V \otimes W$ abgebildet—wie man nachrechnet indem man $\xi_i \otimes \eta_k$ auf $v_j \otimes w_l$ auswertet.

(3) Bemerke zuerst, dass der Isomorphismus wohldefiniert ist, da das Rechterglied sowohl multilinear und schiefsymmetrisch ist, sowohl in den ξ_i als auch in den v_i. Seien $\{v_i\}_i$ und $\{\xi_i\}_i$ wie in (2). Dann wird die Basis $\{\xi_I\}_I$ von $\bigwedge^d(V^*)$ auf die Basis von $(\bigwedge^d V)^*$ dual zur Basis $\{v_I\}_I$ von $\bigwedge^d V$ abgebildet.

(4) Seien $\{v_i\}_i$ und $\{\xi_i\}_i$ wie vorher. Dann wird hier v_I auf ± 1 mal ξ_{I^c} abgebildet, wo I^c das Komplement von I in $\{1, \ldots, n\}$ bedeutet, und wo wir ξ_{I^c} mit Hilfe von 3) schon als Element von $(\bigwedge^{n-d} V)^*$ betrachten.

□

Wir werden brauchen, dass gewisse Kegel in Darstellungen abgeschlossen sind.

Lemma 0.17. *Seien $V_1, \ldots, V_k$ endlich-dimensionale Vektorräume. Dann ist der Kegel*

$$\{v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \mid v_i \in V_i\},$$

dessen Elementen wir reine Tensoren *nennen, abgeschlossen in $V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$.*

Beweis. Für $k = 2$ gibt es einen linearen Isomorphismus

$$V_1 \otimes V_2 \cong (V_1^*)^* \otimes V_2 \cong \mathrm{Hom}(V_1^*, V_2),$$

unter dem die reinen Tensoren gerade den linearen Abbildungen $V_1^* \to V_2$ vom Rang 1 entsprechen. Da die eine abgeschlossene Menge bilden—das Nullstellengebilde der 2×2-Minoren—bilden die reinen Tensoren auch eine.

Nun gehen wir mit Induktion vor: gilt die Aussage für $k - 1$, dann betrachten wir den Isomorphismus

$$\phi : V_1 \otimes \ldots \otimes V_k \cong \mathrm{Hom}(V_1^*, V_2 \otimes \ldots \otimes V_k).$$

Nun ist $\omega \in V_1 \otimes \ldots \otimes V_k$ genau dann ein reiner Tensor, wenn $\phi(\omega)$ eine lineare Abbildung vom Rang 1 ist, *deren Bild ausserdem von einem reinen Tensor aufgespannt wird* (verifiziere dies). Die Rang 1-Bedingung auf $\phi(\omega)$ ist wieder abgeschlossen, und die zweite Bedingung ist äquivalent dazu, dass für alle $\xi \in V_1^*$ das Element $\phi(\omega)\xi$ in dem, nach der Induktionsvoraussetzung abgeschlossenen, Kegel der reinen Tensoren in $V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$ liegt—also ist auch die Bedingung abgeschlossen. □

Lemma 0.18. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und sei $d \in \{0, \ldots, n\}$. Ist C ein abgesschlossener Kegel in V, so ist*

$$\{v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \mid \textit{Der von } v_1, \ldots, v_d \textit{ aufgespannte Unterraum von } V \textit{ ist in } C \textit{ enthalten}\}$$

ein abgeschlossener Kegel in $\bigwedge^d V$.

Auch die Elemente $v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$ nennen wir reine Tensoren.

Beweis. Der Beweis geht in ein paar Schritten, die später einzeln noch wichtig sein werden. Sei $\omega \in \bigwedge^d V$.

(1) Sind $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängige Elemente von V mit $v_i \wedge \omega = 0$ für alle i, so lässt ω sich faktorisieren als $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge \omega'$ mit $\omega' \in \bigwedge^{d-k} V$. Dies sieht man wie folgt ein: erweitere $v_1, \ldots, v_k$ mit $v_{k+1}, \ldots, v_n$ auf eine Basis von V und schreibe $\omega = \sum_I c_I v_I$ wo I die d-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ durchläuft. Betrachte nun für $i = 1, \ldots, k$

$$0 = v_i \wedge \omega = \sum_I c_I v_i \wedge V_I.$$

Nun sind die $v_i \wedge V_I$ mit $i \neq I$ linear unabhängige Elemente von $\bigwedge^{d+1} V$, während die Terme mit $i \in I$ null sind. Es folgt, dass $c_I = 0$ für alle I, die die Menge $\{1, \ldots, k\}$ *nicht* enthalten—und daraus folgt die Behauptung.

(2) Betrachte die Abbildung

$$\phi_\omega : V \to \wedge^{d+1} V,\ v \mapsto v \wedge \omega.$$

Wir zeigen nun, dass ω genau dann ein reiner Tensor ist, wenn der Rang von ϕ_ω höchstens $n - d$ ist: Ist einerseits $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \neq 0$, so sind $v_1, \ldots, v_d$ linear unabhängige Elemente vom Kern von ϕ_ω. Wenn es, umgekehrt, d linear unabhängige v_i im Kern gibt, dann ist ω ein Vielfaches von $v_1 \wedge \ldots \wedge v_d$ nach Teil (1).

Bemerke, dass wir nun schon bewiesen haben, dass die reinen Tensoren einen abgeschlossenen Kegel bilden, also das Lemma für $C = V$ bewiesen haben: sie bilden das Nullstellengebilde der $(n - d + 1)$-Minoren von der linearen Abbildung ϕ_ω, die linear (also polynomial) von ω abhängt.

Allerdings haben diese Gleichungen ziemlich hohen Grad und kann man hiermit das Lemma für allgemeines C nicht beweisen.

(3) Betrachte nun den, bis auf einen Skalar natürlichen, Isomorphismus $\bigwedge^d V \to \bigwedge^{n-d}(V^*), \omega \mapsto \omega^*$. Es folgt leicht aus der Definition, dass dieser Isomorphismus die Menge der reinen Tensoren in $\bigwedge^d V$ bijektiv auf die Menge der reinen Tensoren in $\bigwedge^{n-d}(V^*)$ abbildet. Etwas genauer: ist $\omega = v_1 \wedge \ldots \wedge v_d \neq 0$, so kann man ω^* schreiben als $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_{n-d} \neq 0$, wo die ξ_i gerade den *Annihilator* von $\langle v_1, \ldots, v_d \rangle_K$ in V^* aufspannen: $\xi_i(v_j) = 0$ für alle i, j. Verifiziere dies! Dies kann man noch etwas kürzer sagen: ist $K\omega = \bigwedge^d U$ für einen d-dimensionalen Unterraum U von V, so ist $K\omega^* = \bigwedge^{n-d} U^\perp$, wo $U^\perp = \{\xi \in V^* \mid \xi(U) = 0\}$.

(4) Das schöne an dieser Konstruktion ist nun Folgendes: ist ω ein reiner Tensor, sagen wir $K\omega = \bigwedge^d U$ für einen d-dimensionalen Unterraum U von V, so *kann man U mit einer linear von ω abhängenden Abbildung parametrisieren*. Betrachte nämlich die Abbildung

$$\phi_{\omega^*} : V^* \to \bigwedge^{n-d+1} V^*$$

wie oben definiert. Aus $K\omega^* = \bigwedge^{n-d} U^\perp$ (wegen (3)) folgt, dass $U^\perp$ gerade der Kern von ϕ_{ω^*} ist (wegen (2)). Aber dann ist U gerade das *Bild* der *dualen (transponierten) Abbildung*

$$(\phi_{\omega^*})^t : \bigwedge^{n-d+1} V \to V.$$

Also parametrisiert $\bigwedge^{n-d+1} V$ via $\phi^t_{\omega^*}$ den Raum U. Für $\beta \in \bigwedge^{n-d+1} V$ ist $\phi^t_{\omega^*}\beta$ ein Element von U, und das ganze U wird so erreicht.

(5) Nehme nun an, $\omega \neq 0$ ist ein reiner Tensor, sagen wir $K\omega = \bigwedge^d U$ für einen d-dimensionalen Unterraum von V; dann ist also $K\omega^* = \bigwedge^{n-d} U^\perp$. Weiter ist U das Bild von $\phi^t_{\omega^*}$ (wegen (4)) und, dual, $U^\perp$ das Bild von ϕ^t_ω. *Es gilt also*

$$\phi^t_\omega \alpha(\phi^t_{\omega^*}\beta) = 0$$

für alle $\alpha \in \bigwedge^{d+1} V^*$ und $\beta \in \bigwedge^{n-d+1} V$. Wenn, umgekehrt, ω *kein* reiner Tensor ist, so hat ϕ^t_ω Rang $> n-d$ und $\phi^t_{\omega^*}$ Rang $> d$ (beides wegen (2)), so dass die linke Seite unmöglich für alle α, β null sein Kann. Die (von α und β paramaterisierten) Gleichungen oben *definieren also die Menge der reinen Tensoren*. Sie sind in der Literatur bekannt als die *Plücker-Relationen*.

(6) Die Menge aus dem Lemma besteht nun aus allen $\omega \in \bigwedge^d V$ die erstens die Plücker-Relationen erfüllen (damit ω ein reiner Tensor ist, sagen wir $K\omega = \bigwedge^d U$), und zweitens die Bedingungen

$$\phi^t_{\omega^*}\beta \in C \text{ für alle } \beta \in \bigwedge^{n-d+1} V$$

erfüllen—da ja die linke Seite genau die Elemente von U parametrisiert.

□