Quelques idéaux maximaux de l'anneau des fonctions continues

par Giordano Favi

Voilà. Il récidive. Plutôt que de parler de sa thèse et de livrer au monde ses cogitations sur les cubiques, l'auteur nous fait subir une fois de plus une de ses vulgarisations douteuses... Cet article s'inscrit en effet parfaitement dans la mouvance Jimaesque de l'auteur et peut être considéré comme une protubérance de l'article "Des anneaux de Boole" (cf. [1]). Dans un style académique, zélateur, voire pédant, il ne fait aucun cas du collège de mathématiciens omniscients qui pourraient censurer ses dires pour "carence de substance mathématique novatrice", "manque d'inspiration et succession accrue de trivialités", etc. Ce style a néanmoins l'avantage de rendre la matière accessible à un large public. C'est sûrement pour celui-ci que l'auteur s'obstine à écrire.

Igor Japovic

Je ne peux que remercier vivement Igor, mon ami de toujours, pour avoir daigné introduire mon article de sa plume délicate et précise. Mais trève de flagorneries : entrons tout de suite dans le vif du sujet.

Soit X un espace topologique. On notera $C(X;\mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues de X vers $\mathbb{R}$ (celui-ci étant muni de sa topologie usuelle bien entendu).

Le but de ce minusculissime article est de décrire un peu l'ensemble $\mathrm{Max}(C(X;\mathbb{R}))$ des idéaux maximaux de cet anneau. Il s'agit ici d'un recueil de choses essentiellement bien connues je l'avoue. Je les partage simplement parce que je les trouve très belles. Il y a tout de même une généralisation peu connue proposée par Armin agrémentée de quelques exemples. Bon. Ok. Une autre fois je vous parlerai de ma thèse. C'est promis.

Pour bien faire, rappelons qu'un idéal $\mathfrak{m}$ d'un anneau commutatif A est dit **maximal** si l'anneau quotient $A/\mathfrak{m}$ est un corps. De façon équivalente, $\mathfrak{m}$ est maximal si le seul idéal différent de $\mathfrak{m}$ qui le contient est l'anneau A tout entier (d'où le nom).

Commençons par donner une famille d'idéaux maximaux tout-à-fait respectable :

Pour tout $x \in X$ considérons l'application "évaluation en x", notée ε_x, c'est-à-dire l'homomorphisme d'anneaux défini par

$$\begin{aligned} \varepsilon_x : C(X;\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Le lecteur vérifiera sans peine la surjectivité d'un tel homomorphisme. Par conséquent, si l'on note $\mathfrak{m}_x$ le noyau de ε_x, on a que

$$C(X;\mathbb{R})/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R}$$

et donc $\mathfrak{m}_x$ est maximal. Pour ceux qui ne l'auraient pas remarqué, $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal des fonctions qui s'annulent en x.

Voilà donc qu'apparaît tout naturellement une application d'ensembles[1]

$$\varepsilon : X \longrightarrow \mathrm{Max}(C(X;\mathbb{R}))$$

qu'il serait bon de comprendre un peu mieux.

Remarquons premièrement que ε n'est en général *pas* injective. L'exemple le plus abrutissant est celui où on prend X un ensemble avec au moins deux éléments et qu'on lui flanque la topologie grossière dessus. Dans ce cas, les seules fonctions continues sont les fonctions constantes et on a donc $\mathfrak{m}_x = \{0\}$ pour

[1] mais, si on met la topologie de Zariski sur l'ensemble de droite (et ON LE PEUT !), vous savez quoi ? C'est une application CONTINUE !!! Bouaaaahah !!!

tout $x \in X$. On laissera au lecteur le soin de donner un exemple d'espace moins vulgaire pour lequel l'application ε n'est pas injective.

Si l'on veut que ε soit injective il faut prendre un espace plus décent. On dira donc que X est **décent**[2] si pour tout couple de points $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = 0$ et $f(y) \neq 0$. C'est tautologiquement équivalent à demander l'injectivité de ε.

Des exemples d'espaces décents se trouvent à la pelle. Le fameux lemme d'Urysohn affirme que, si X est un espace normal[3], pour tous fermés disjoints A et B il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_{|A} = 0$ et $f_{|B} = 1$. En particulier tout espace normal est décent. Sans faire appel à Urysohn, on montre facilement que tout espace métrisable est décent.

Bien. Maintenant que l'on a compris quand est-ce que ε est injective nous pouvons passer à la surjectivité.

On dira qu'un espace topologique X possède la propriété (M) si $\varepsilon : X \longrightarrow C(X;\mathbb{R})$ est surjective. De façon équivalente cela signifie que tous les idéaux maximaux de $C(X;\mathbb{R})$ sont de la forme $\mathfrak{m}_x$. Nous allons voir qu'il n'est pas tout-à-fait évident de classer les espaces ayant la propriété (M). On peut cependant donner une vaste famille de tels espaces : les espaces compacts[4]. C'est la proposition suivante qui est importante. Elle est tout-à-fait classique et sera généralisée un peu plus bas.

Proposition 1.
Soit X un espace compact et I un idéal propre de $C(X;\mathbb{R})$. Alors il existe un $x \in X$ tel que $I \subseteq \mathfrak{m}_x$.

Preuve: Supposons que pour tout $x \in X$ on ait $I \not\subseteq \mathfrak{m}_x$. Ceci signifie que, pour tout $x \in X$, il existe $f_x \in I$ telle que $f_x(x) \neq 0$. Par continuité de chaque f_x, il existe un ouvert U_x avec $x \in U_x$ et $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in U_x$. On a clairement que $X = \bigcup_{x \in X} U_x$. Par compacité de X, il existe une famille finie d'ouverts, disons $U_1, \dots, U_n$, qui recouvre déjà X. Notons $f_1, \dots, f_n$ les fonctions correspondantes. La fonction $g = f_1^2 + \cdots + f_n^2$ appartient alors à l'idéal I et vérifie $g(x) > 0$ pour tout $x \in X$. Ainsi la fonction $\frac{1}{g}$ est définie et continue sur X. Dès lors $1 = g \cdot \frac{1}{g} \in I$ et donc I n'est pas propre contredisant l'hypothèse.

Corollaire 2.
Tout espace compact possède la propriété (M).

Preuve: Soit en effet $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $C(X;\mathbb{R})$. D'après la proposition ci-dessus il existe $x \in X$ tel que $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x$. Par maximalité de $\mathfrak{m}$ on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$.

Si, de plus, on impose à X une infime condition de séparabilité on a une description complète de l'ensemble $\mathrm{Max}(C(X;\mathbb{R}))$.

Corollaire 3.
Soit X un espace compact T_2. Alors l'application

$$\varepsilon : X \longrightarrow \mathrm{Max}(C(X;\mathbb{R}))$$

est une bijection[5].

Preuve: En effet tout espace compact T_2 est normal (exercice laissé au lecteur) et donc décent. Ainsi ε est injective. Comme l'espace est compact la surjectivité en découle.

Bon. Jusque là, rien de neuf. On a fait dans le classique. Pour sortir des sentiers battus il faut se poser une ou deux questions...

---

[2] Certains disent $\mathrm{T}_{2\frac{1}{2}}$ je crois.

[3] Un espace topologique X est dit **normal** (ou T_4) si
1) tous les points sont fermés,
2) pour tous fermés disjoints A et B il existe des ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

[4] Ici compact désigne un espace dont tout recouvrement par des ouverts admet un sous-recouvrement fini. On ne demande pas que l'espace soit T_2 i.e. que deux points puissent être séparés par des ouverts disjoints.

[5] Maaaaaaais, si on met la topologie de Zariski à droite (et on le peut, on le peut) c'est un homéomorphisme. Alors laaaaaaaaaaa ! Un homéo.

On peut se demander si le corollaire 2 admet une réciproque. Il n'en est rien. Je vous propose deux exemples : l'un trivial (issu de mon brillant esprit) l'autre moins (issu du brillant esprit d'Armin).

Exemples:

• Soit X un ensemble infini et $x_0 \in X$. On met sur X la topologie où l'on décrète qu'une partie non vide A est ouverte si et seulement si $x_0 \in A$. Remarquons au passage que ceci a le mérite de rendre x_0 *dense* dans X. Mais regardons de plus près l'anneau des fonctions continues sur X avec cette topologie : soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$ et supposons qu'il existe $y \in X$ avec $f(y) \neq f(x_0)$. Dans ce cas il existe un ouvert U contenant $f(y)$ avec $f(x_0) \notin U$. Ainsi $x_0 \notin f^{-1}(U)$ ce qui signifie que f n'est pas continue. Nous en déduisons que les seules fonctions continues sont les constantes. Donc $C(X;\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et le seul idéal maximal est l'idéal 0. Ainsi X vérifie la propriété (M). Comme X est infini on voit sans peine qu'il n'est pas compact. Ceci donne des exemples d'espaces possédant la propriété (M) qui ne sont pas compacts. Remarquons cependant que dans un tel espace les points ne sont pas fermés. C'est juste un misérable espace T_0.

• Soit $I = [0,1]$ l'intervalle unité. Appelons $B = I \times \{0\}$. On met sur I^2 la topologie dite d'Armin : les ouverts sont toutes les parties de la forme $U \setminus A$, où U est un ouvert usuel de I^2 et A une partie de B. On voit que la topologie induite sur B est discrète et on se convainc aisément que I^2 n'est pas compact. Cet exemple est meilleur que le précédent. L'espace considéré a le bon goût d'être plus fin que celui d'avant. On voit en effet sans peine que I^2 est décent. Pour voir que I^2 satisfait la propriété (M), on va, suivant une idée d'Armin, trouver une classe d'espaces topologiques qui englobe les deux exemples.

Pour faire bien on met une définition :

Définition 1.
*Soit X un espace topologique et Y une partie de X. On dit que X est Y-**compact** si, pour tout recouvrement de X par des ouverts de X, il existe un sous-recouvrement fini qui recouvre Y.*

Remarque: Cette notion généralise celle d'espace compact.

On passe maintenant au résultat qui généralise la proposition 1.

Théorème 4.
Soit X un espace topologique. Supposons qu'il existe une partie dense $A \subseteq X$ tel que X est A-compact. Alors X possède la propriété (M).

Preuve: Soit I un idéal de $C(X;\mathbb{R})$ tel que $I \not\subset \mathfrak{m}_x$ pour tout $x \in X$. Soit $x \in X$. Il existe $f_x \in I$ telle que $f_x(x) \neq 0$. Donc il existe $g_x \in I$ telle que $g_x(x) > 1$. Ainsi

$$\left\{g_x^{-1}\big(]1,\infty[\big) \mid x \in X\right\}$$

est un recouvrement de X. Par hypothèse, il existe un sous-recouvrement fini de A, disons

$$\left\{g_1^{-1}\big(]1,\infty[\big), \ldots, g_n^{-1}\big(]1,\infty[\big)\right\}.$$

Considérons alors la fonction $g = g_1 + \cdots + g_n$. On a que $g \in I$ et $g(x) > 1$ pour tout $x \in A$. Par continuité de g et par densité de A on a que $g(x) \geq 1$ pour tout $x \in X$. Ainsi $\frac{1}{g}$ est définie et on conclut comme avant que la fonction constante 1 appartient à l'idéal.

On voit sans peine que la proposition 1 est un cas particulier du théorème.

Remarquons aussi que le théorème englobe bien les exemples précités : Dans le premier exemple il suffit de prendre $\{x_0\}$ comme partie dense. Dans le second l'ensemble $U = [0,1]\times]0,1]$ fait l'affaire.

Enonçons encore un corollaire aisé de ce qui précède

Corollaire 5.
Soit X un espace topologique ayant une partie finie A qui soit dense. Alors X possède la propriété (M).

Preuve: Clairement, pour toute partie finie A de X, on a que X est A-compact. On applique alors le théorème ci-dessus.

Pour terminer voyons que si on se place dans une catégorie d'espaces topologiques raisonnables la proposition 1 admet une réciproque.

On dira qu'un espace topologique X est un **espace d'Urysohn**[6] si pour tout point $x \in X$ et tout ouvert U avec $x \in U$ il existe une fonction continue $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \neq 0$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in X \setminus U$.

Proposition 6.
Soit X un espace topologique d'Urysohn non compact. Alors l'anneau $C(X;\mathbb{R})$ possède des idéaux maximaux qui ne sont pas de la forme $\mathfrak{m}_x$. Autrement dit l'application ε n'est pas surjective.

Preuve: Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de X par des ouverts qui n'admet pas de sous-recouvrement fini. Considérons I l'idéal des fonctions continues qui s'annulent en dehors d'une réunion finie d'ouverts de $\mathcal{U}$. Clairement la fonction 1 n'est pas dans I car X n'est pas réunion finie d'ouverts de $\mathcal{U}$. Donc I est un idéal propre de l'anneau $C(X;\mathbb{R})$. Il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{m}$ tel que $I \subseteq \mathfrak{m}$. Montrons à présent que $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_x$ pour tout $x \in X$. En effet, si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ pour un certain x alors on aurait que $f(x) = 0$ pour tout $f \in I$. Or $x \in U$ pour un certain ouvert U du recouvrement $\mathcal{U}$. Mais comme X est un espace d'Urysohn, il existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \neq 0$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in X \setminus U$. Ainsi $f \in I$ mais $f(x) \neq 0$ ce qui est absurde.

Voilà. Tout y est. Ou presque. Je n'ai pas trouvé une condition nécessaire et suffisante sur X pour qu'il possède la propriété (M). Une autre fois. Peut-être.

Bibliographie

[1] Favi Giordano, *Des anneaux de Boole*, Journal de l'IMA *5*, 93-108,

[6] d'autres disent $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$.