



## Anneaux de Boole

Pour la suite du texte, l'auteur demandera à ses aimables lecteurs de bien vouloir user d'empathie afin de se mettre à la place de l'élève qu'il fut et d'entrer dans cette *terra incognita* qui s'ouvrait devant lui.

Le but est de donc répondre à l'impertinente question

*“Est-ce qu'un anneau  $A$  avec  $a^2 = a \forall a \in A$  ressemble à quelque chose que vous avez déjà vu ?”*

La réponse sera donnée en établissant le théorème de représentation de Stone. Théorème que nous ne dévoilons pas immédiatement pour des raisons commerciales évidentes.

Tout d'abord, on commence par donner un nom aux anneaux incriminés.

**Définition.** On appelle **anneau de Boole** tout anneau unitaire  $A$  dans lequel  $a^2 = a$  pour tout  $a \in A$ .

Avant de se lancer dans une étude abstraite et plus approfondie de ces anneaux, l'élève se donna quelques exemples pour se mettre en confiance. Dans un élan d'extrême munificence il nous les a communiqués : nous les reproduisons ici avec sa permission.

**Exemples:** 1) Sans l'ombre d'un doute le premier exemple qui vient à l'esprit<sup>4</sup> est le classique anneau des parties d'un ensemble. Au risque d'ennuyer quelques mathématiciens déjà aboutis, mais avec le sempiternel souci de ne pas larguer notre auditoire, nous rappelons la savante construction de cet anneau.

On considère donc un ensemble  $X$  (“tout nu” on a envie de dire...) et  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble de ses parties. Si  $A$  et  $B$  sont des parties de  $X$ , on définit leur **différence symétrique** par

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Cette opération joue le rôle de la somme dans notre anneau : on voit sans peine que l'ensemble vide  $\emptyset$  est élément neutre pour la différence symétrique, que celle-ci est commutative et que toute partie  $A$  admet pour opposé  $A$  lui-même car  $A\Delta A = \emptyset$ . L'associativité est un peu plus pénible à vérifier, mais c'est un exercice bien connu de tout étudiant de deuxième... Ainsi  $(\mathcal{P}(X), \Delta)$  est un groupe abélien.

La structure multiplicative sur  $\mathcal{P}(X)$  est donnée par l'intersection. On voit que l'élément unité pour cette loi est l'ensemble tout entier  $X$  et on vérifie la distributivité

$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C).$$

La multiplication est clairement commutative et on a bien  $A^2 = A$  car  $A \cap A = A$  ! On se rend aussi vite compte qu'il y a très peu d'éléments inversibles dans  $\mathcal{P}(X)$ ... Le seul est le 1 lui-même c'est-à-dire  $X$ .

Nous ne manquons pas l'occasion de faire remarquer que la construction est tout-à-fait *fonctorielle* : pour toute application d'ensembles  $f : X \rightarrow X'$ , le lecteur vérifiera que l'application  $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X') \rightarrow \mathcal{P}(X)$  définie par  $\mathcal{P}(f)(A') = f^{-1}(A')$  est un homomorphisme d'anneaux. Au fait on montre facilement que

$$\mathcal{P} : \mathbf{Ens} \rightarrow \mathbf{AnnComm}$$

$$X \mapsto \mathcal{P}(X)$$

$$f \mapsto \mathcal{P}(f)$$

est un foncteur *contravariant* de la catégorie des ensembles dans celle des anneaux commutatifs.

2) L'autre exemple auquel on pense tout de suite est celui de l'anneau de toutes les applications d'un ensemble  $X$  vers le corps à deux éléments  $\mathbb{Z}/2$ . Les lois de cet anneau, communément noté  $\mathbb{Z}/2^X$ , sont les simples lois d'addition et multiplication pour des applications aboutissant dans un anneau : pour tous  $f, g \in \mathbb{Z}/2^X$  on pose  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  et  $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$  pour tout  $x \in X$ .

<sup>4</sup> après  $\mathbb{Z}/2$ ,  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ , ... bien sûr !

Maaaaaaiiiiiiss, l'œil acéré du mathématicien rodé aura immédiatement remarqué qu'il n'y a aucune différence entre le premier et le deuxième exemple ! En effet on a une bijection d'ensembles

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}/2^X &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ f &\longmapsto \varphi(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \end{aligned}$$

dont l'inverse est donné par l'application qui à toute partie  $A$  de  $X$  associe  $\chi_A$  l'application caractéristique de  $A$ , c'est-à-dire l'application qui vaut 1 sur  $A$  et 0 ailleurs. On voit aussi que  $\varphi(f+g) = \varphi(f) \Delta \varphi(g)$  et que  $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cap \varphi(g)$ . Remarquons au passage que ce point de vue permet de prouver l'associativité de  $\Delta$  de manière fulgurante et sans aucun effort... Notons aussi que l'anneau  $\mathbb{Z}/2^X$  s'identifie au produit cartésien  $\prod_{x \in X} \mathbb{Z}/2$  muni de sa structure d'addition et de multiplication composante par composante.

3) Un exemple un peu plus tordu est le suivant : on considère l'anneau de Boole  $A = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/2$  et dans celui-

ci le sous-ensemble  $B = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/2$  (qui au fait est un sous-anneau *non unitaire* mais peu nous importe).

On regarde alors  $B^+$  le plus petit sous-anneau (avec unité donc) de  $A$  qui contient  $B$  (le fidèle et attentif lecteur du JIMA aura remarqué que l'anneau  $B^+$  est obtenu à partir de  $B$  par adjonction de l'unité comme il est fait mention dans [2]). Ce nouvel anneau est bien évidemment un anneau de Boole (étant un sous-anneau d'un anneau de Boole !) et comme  $B$  est infini dénombrable, il en va de même de  $B^+$ . Comme nous savons tous que l'ensemble des parties d'un ensemble ne peut pas être infini dénombrable, on en déduit que  $B^+$  n'est pas isomorphe à un  $\mathcal{P}(X)$ .

4) L'exemple ci-dessus se généralise de la façon suivante : soit  $A$  un anneau de Boole et  $B$  un sous-ensemble de  $A$ . Notons  $B^+$  le plus petit sous-anneau de  $A$  qui contient  $B$ . En faisant cette opération on ne rajoute au plus que les éléments 0 et 1 de l'anneau  $A$  et toutes les sommes de produits finis d'éléments de  $B$ . On voit ainsi que si  $B$  est infini dénombrable il en va de même de  $B^+$ . On peut donc trouver de cette façon des tas d'anneaux de Boole dénombrables et donc qui ne sont pas isomorphes à des  $\mathcal{P}(X)$ .

### Une première intuition

En essayant de répondre à la question, l'élève se rendit lumineusement compte que les seuls exemples d'anneaux de Boole qu'il arrivait à construire étaient ceux du type décrit ci-dessus. Dans un élan de confiance, il pensa qu'il était plausible que tous les anneaux de Boole se plongeassent dans un  $\mathcal{P}(X)$  pour un  $X$  bien choisi. Seulement il ne savait que prendre pour ce  $X$ ... Il se décida alors de travailler un peu plus sur ces anneaux et d'en dégager quelques petites propriétés. Toujours dans un excès de magnanimité il nous a fait part de ses découvertes.

### Quelques constats

De la simple définition initiale une conséquence immédiate en découle :

*Tout anneau de Boole est de caractéristique 2 et commutatif.*

En effet de  $(a+1)^2 = a+1$  on déduit que  $2a = 0$  pour tout  $a \in A$  (ou que  $a = -a$ , ce qui revient au même) et de  $(a+b)^2 = a+b$  on tire que  $ab = -ba = ba$ . Remarquons l'importance de l'existence de l'unité dans un tel anneau : on peut ainsi en déduire que  $a = -a$  et donc par suite que l'anneau est bien commutatif.

Un autre fait mirobolant et apparemment anodin est le suivant :

*Tout anneau de Boole intègre est isomorphe à  $\mathbb{Z}/2$ .*

En effet, soit  $A$  un tel anneau et  $a \in A$  avec  $a \neq 0$ . On a  $a^2 = 1 \cdot a$  donc  $a^2 - 1 \cdot a = 0$  et par suite  $(a-1)a = 0$ . L'anneau étant intègre et  $a \neq 0$  il s'ensuit que  $a = 1$ .

Comme conséquence de ce fait on a que

*Dans un anneau de Boole tout idéal premier est maximal.*

En effet, si  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  on a que  $A/\mathfrak{p}$  est un anneau de Boole intègre et donc  $A/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{Z}/2$  ce qui montre que  $\mathfrak{p}$  est maximal.

Un autre phénomène curieux se produit dans les anneaux de Boole : si  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  et  $a, b \notin \mathfrak{p}$  alors  $a + b \in \mathfrak{p}$ . Cela découle de ce que si  $a, b \notin \mathfrak{p}$  alors leurs classes valent 1 dans le quotient  $A/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{Z}/2$  et donc leur somme est nulle, ce qui signifie justement que  $a + b \in \mathfrak{p}$ .

Fort de ces remarques quasi triviales, le cerveau de l'élève bouillonnait à la recherche de quelque idée supplémentaire. Le but était toujours d'essayer de mettre n'importe quel anneau de Boole  $A$  dans un  $\mathcal{P}(X)$  où  $X$  est un ensemble qui dépend de  $A$  bien évidemment. Après quelques essais infructueux et quelques neurones brûlés<sup>5</sup>, l'illumination vint pendant un cours de Théorie de la mesure et Intégration : les mots *spectre*, *Stone*<sup>6</sup> et *Boole* avaient été scandés en vrac, mais il était clair dans la tête de notre petit élève qu'il fallait prendre pour  $X$  le spectre de  $A$ !!! Il ne suffisait plus qu'à donner l'application  $A \rightarrow \mathcal{P}(\text{Spec}(A))$  et démontrer des petites choses, mais le plus gros du travail venait de se réaliser !

Rafraîchissons au préalable la mémoire de nos lecteurs assidus par un petit rappel sur  $\text{Spec}(A)$  c'est-à-dire l'ensemble des idéaux premiers de  $A$ . Si  $I$  est un idéal d'un anneau commutatif  $A$ , on désigne par  $V(I)$  l'ensemble des idéaux premiers de  $A$  qui contiennent  $I$ . La collection de ces  $V(I)$  vérifie les conditions de fermés d'une topologie sur  $\text{Spec}(A)$  nommée topologie de Zariski (cf. [2]). Si  $a \in A$  on note  $D(a)$  le complémentaire de  $V(\langle a \rangle)$ . Il s'agit donc de l'ensemble des idéaux premiers qui ne contiennent pas  $a$  et c'est un ouvert pour la topologie de Zariski. De plus, pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ , l'adhérence du singleton  $\{\mathfrak{p}\}$  est égale à  $V(\mathfrak{p})$  et par conséquent les idéaux maximaux de  $A$  correspondent au points fermés de  $\text{Spec}(A)$ . Dans le cas des anneaux de Boole nous voyons donc que tous les points de  $\text{Spec}(A)$  sont fermés et qu'il s'agit donc d'un espace topologique  $T_1$ .

Voici enfin l'application tant cherchée

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathcal{P}(\text{Spec}(A)) \\ a &\longmapsto D(a) \end{aligned}$$

Il suffit à ce moment de prouver que c'est bel et bien un homomorphisme d'anneaux injectif.

Tout d'abord  $D(a + b) \subseteq D(a) \cup D(b)$  car si  $\mathfrak{p} \in D(a + b)$  alors  $a + b \notin \mathfrak{p}$  et donc  $a \notin \mathfrak{p}$  ou  $b \notin \mathfrak{p}$  ce qui montre que  $\mathfrak{p} \in D(a) \cup D(b)$ .

D'autre part on a  $D(a + b) \cap (D(a) \cap D(b)) = \emptyset$ . En effet, si  $\mathfrak{p} \in D(a) \cap D(b)$  il s'ensuit que  $a, b \notin \mathfrak{p}$  et par conséquent  $a + b \in \mathfrak{p}$  comme on a vu plus haut. Ces deux premiers constats montrent que  $D(a + b) \subseteq D(a) \Delta D(b)$ .

Pour l'inclusion inverse, on prend  $\mathfrak{p} \in D(a) \Delta D(b) = (D(a) \cup D(b)) \setminus (D(a) \cap D(b))$ . Si  $\mathfrak{p} \in D(a)$  on a que  $a \notin \mathfrak{p}$  et que  $b \in \mathfrak{p}$  (car  $\mathfrak{p}$  n'est pas dans l'intersection) et par suite  $a + b \notin \mathfrak{p}$  comme désiré.

En résumé nous avons que

$$D(a + b) = D(a) \Delta D(b).$$

De plus  $D(0) = \emptyset$  car tout idéal contient 0. Ceci montre que  $D$  est un homomorphisme de groupes.

Voyons de même que  $D$  préserve la structure multiplicative. Si  $ab \notin \mathfrak{p}$  on a que  $a, b \notin \mathfrak{p}$  car  $\mathfrak{p}$  est un idéal. Donc  $D(ab) \subseteq D(a) \cap D(b)$ . D'autre part, si  $\mathfrak{p} \in D(a) \cap D(b)$  on a que  $a, b \notin \mathfrak{p}$  ce qui force  $ab \notin \mathfrak{p}$  car  $\mathfrak{p}$  est premier. Ceci prouve l'autre inclusion et donc l'égalité cherchée

$$D(ab) = D(a) \cap D(b).$$

Comme  $D(1) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid 1 \notin \mathfrak{p}\} = \text{Spec}(A)$  on a bien que  $D$  est un homomorphisme d'anneaux.

Il ne nous reste plus qu'à montrer l'injectivité de cet homomorphisme. Prenons donc  $a \in A$  tel que  $D(a) = \emptyset$ . Ceci signifie que  $a \in \mathfrak{p}$  pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ . Or il est bien connu que l'intersection des idéaux premiers d'un anneau commutatif  $A$  est égale au nilradical de  $A$  c'est-à-dire l'idéal formé des éléments nilpotents. Ainsi nous avons que  $a$  est nilpotent et donc qu'il existe un entier  $n$  avec  $a^n = 0$ . Mais, comme par enchantement, nous avons que  $a = a^2 = \dots = a^n = 0$  ce qui prouve notre assertion.

<sup>5</sup> y en a qui se sont suicidés pour moins que ça !

<sup>6</sup> il a algébrisé l'analyse harmonique ce type-là ! (cf. [4])

Au final notre ingénu élève venait de démontrer le fameux

### **Théorème de représentation de Stone<sup>7</sup>.**

*Tout anneau de Boole est isomorphe à un sous-anneau de l'anneau des parties d'un ensemble. Plus précisément, si  $A$  est un anneau de Boole, on a une injection d'anneaux de  $A$  dans  $\mathcal{P}(\text{Spec}(A))$ .*

Après cela, il est allé se coucher et a laissé la place à l'auteur pour quelques petits compléments.

**Remarque:** Le célèbre anagrammologue belge Mario Ring<sup>8</sup> nous a récemment suggéré une preuve différente de l'injectivité de  $D$  basée sur la remarque suivante :

*dans un anneau de Boole le seul élément inversible est le 1.*

En effet, soit  $a \in A$  un élément inversible et  $b \in A$  avec  $ab = 1$ . De là on tire subtilement que

$$a = a(ab) = a^2b = ab = 1.$$

Pour prouver l'injectivité de  $D$  on procède alors comme suit. Soit  $a \in A$  un élément non nul. On a que  $1 - a \neq 1$  et donc n'est pas inversible. Il existe donc un idéal maximal qui contient  $1 - a$  et par conséquent  $D(a)$  est non vide.

Une question qui se soulève tout naturellement est celle de savoir quand l'homomorphisme ci-dessus est un isomorphisme (i.e. quand c'est une surjection). Nous verrons incessamment que cela ne dépend que de la topologie de  $\text{Spec}(A)$  et que celle-ci ne dépend que du cardinal de  $A$ .

Une première remarque (banale mais utile) s'impose : l'image de  $A$  par cet homomorphisme n'est composée que de parties *ouvertes* pour la topologie de Zariski sur  $\text{Spec}(A)$ . Ainsi, si  $\text{Spec}(A)$  n'est pas discret on peut déjà assurer que  $D$  n'est pas un isomorphisme. Néanmoins, dans le cas des anneaux de Boole finis l'isomorphisme a lieu :

### **Corollaire.**

*Soit  $A$  un anneau de Boole fini. Alors  $A \simeq \mathcal{P}(\text{Spec}(A))$ .*

**Preuve:** Comme  $A$  est fini, on a que  $\text{Spec}(A)$  l'est aussi et, comme tous ses points sont fermés, il est muni de la topologie discrète. Dans ce cas, pour montrer que l'application  $D$  est surjective il suffit de montrer que tous les singletons de  $\text{Spec}(A)$  ont une préimage. On doit donc trouver, pour tout idéal maximal  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  un élément  $a_{\mathfrak{p}}$  tel que  $D(a_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}\}$ . Cela se fait grâce au subterfuge du célèbre tautologue hindou Brachamutanda<sup>9</sup> que nous reproduisons ici : on pose  $a_{\mathfrak{p}} = \prod_{a \notin \mathfrak{p}} a$  et le tour est joué.

D'autre part, l'espace topologique  $\text{Spec}(A)$  est toujours compact et donc il ne peut être discret à moins d'être fini. De plus, si  $\text{Spec}(A)$  est fini, par le lemme chinois généralisé, on a

$$A \simeq A/0 = A/\mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_n \simeq A/\mathfrak{p}_1 \times \dots \times A/\mathfrak{p}_n \simeq \mathbb{Z}/2 \times \dots \times \mathbb{Z}/2$$

et donc que  $A$  est fini ! Au bout du compte nous voyons que  $\text{Spec}(A)$  est discret si et seulement si  $A$  est fini. Nous avons donc la réciproque du corollaire précédent et nous résumons le tout par ce que nous appellerons le théorème des anneaux de Boole finis.

### **Théorème des anneaux de Boole finis.**

*Soit  $A$  un anneau de Boole. Alors  $A \longrightarrow \mathcal{P}(\text{Spec}(A))$  est un isomorphisme si et seulement si  $A$  est fini.*

<sup>7</sup> les curieux peuvent aller consulter l'article original [3].

<sup>8</sup> aussi connu sous le nom de Goran Rimi.

<sup>9</sup> tiré du recueil de pensées [5].

**Remarque:** Dans toute cette étude nous avons expressément tu le point de vue des filtres (cf. [1]). Nous le présentons brièvement ici pour les lecteurs intéressés.

Le fait remarquable (mais banal une fois remarqué...) est le suivant :

*l'ensemble des idéaux de l'anneau  $\mathcal{P}(X)$  est en bijection avec l'ensemble des filtres sur  $X$ .*

La bijection s'établit en associant à tout idéal  $I$  de  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble  $\mathcal{F}_I = \{X \setminus A \mid A \in I\}$  que l'on vérifie aisément être un filtre sur  $X$ . Réciproquement, à tout filtre  $\mathcal{F}$  sur  $X$  on associe  $I_{\mathcal{F}} = \{X \setminus A \mid A \in \mathcal{F}\}$  qui est un idéal de  $\mathcal{P}(X)$  en vertu des propriétés de filtre de  $\mathcal{F}$ . C'est un très bon exercice de tautologie appliquée que de vérifier que les applications ci-dessus sont l'une inverse de l'autre. Remarquez au passage que, dans cette identification, les idéaux maximaux correspondent aux ultrafiltres. On peut donc mettre la topologie de Zariski sur l'ensemble des ultrafiltres de  $X$  et, si on veut, donner un théorème de représentation de Stone uniquement en termes d'ultrafiltres.

Un autre fait qui n'échappe pas à l'œil du catégoriste est que l'homomorphisme  $D : A \rightarrow \mathcal{P}(\text{Spec}(A))$  (que nous noterons subtilement  $D_A$ ) est *naturel* dans le sens que pour tout homomorphisme d'anneaux  $f : A \rightarrow B$  on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{D_A} & \mathcal{P}(\text{Spec}(A)) \\ f \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}(\text{Spec}(f)) \\ B & \xrightarrow{D_B} & \mathcal{P}(\text{Spec}(B)) \end{array}$$

Nous sommes donc en présence d'une transformation naturelle de foncteurs

$$D : Id_{\mathbf{AnnBoole}} \rightarrow \mathcal{P} \circ \text{Spec}$$

qui se trouve être un isomorphisme quand on se restreint à la sous-catégorie des anneaux de Boole *finis*.

Il est alors naturel de se poser la question de ce qu'il advient si l'on compose les foncteurs  $\mathcal{P}$  et  $\text{Spec}$  dans l'autre sens. La réponse n'est pas très compliquée.

Soit  $X$  un ensemble, pour tout  $x \in X$  on a une application  $\varepsilon_x : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{Z}/2$  qui est définie par  $\varepsilon_x(A) = 0$  si  $x \notin A$  et  $\varepsilon_x(A) = 1$  si  $x \in A$ . Cette application s'appelle l'évaluation en  $x$  et on vérifie que c'est un homomorphisme d'anneaux. L'évaluation en  $x$  est clairement surjective et son noyau, noté  $\mathfrak{p}_x$ , vérifie donc  $\mathcal{P}(X)/\mathfrak{p}_x \simeq \mathbb{Z}/2$ . Ainsi  $\mathfrak{p}_x$  est un idéal maximal de  $\mathcal{P}(X)$  et on a une application naturelle

$$X \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{P}(X)).$$

$$x \mapsto \mathfrak{p}_x$$

Si  $x \neq y$  on a  $\{y\} \in \mathfrak{p}_x$  tandis que  $\{y\} \notin \mathfrak{p}_y$ . Donc  $\mathfrak{p}_x \neq \mathfrak{p}_y$  et l'application ainsi définie est une injection. En outre des vérifications aisées montrent encore une fois que, si  $f : X \rightarrow Y$  est une application entre ensembles, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{P}(X)) \\ f \downarrow & & \downarrow \text{Spec}(\mathcal{P}(f)) \\ Y & \longrightarrow & \text{Spec}(\mathcal{P}(Y)) \end{array}$$

montrant ainsi qu'on a de nouveau une transformation naturelle

$$Id_{\mathbf{Ens}} \rightarrow \text{Spec} \circ \mathcal{P}.$$

Encore une fois, ce morphisme de foncteurs va être un isomorphisme si on se restreint à la catégorie des ensembles finis. On commence par un lemme.

**Lemme.**

*Soit  $X$  un ensemble fini et  $I$  un idéal propre de  $\mathcal{P}(X)$ . Alors il existe  $x \in X$  avec  $I \subseteq \mathfrak{p}_x$ .*

**Preuve:** Supposons que ce soit faux. Cela signifie que pour tout  $x \in X$  il existe  $A \in I$  avec  $x \in A$ . Par conséquent  $\{x\} \in I$  pour tout  $x \in X$ . Dès lors, comme  $X$  est fini, on a que  $X = \Delta_{x \in X} \{x\} \in I$  et donc  $I = \mathcal{P}(X)$  ce qui est absurde.

Comme corollaire de ce résultat nous déduisons que si  $X$  est fini tout idéal maximal de  $\mathcal{P}(X)$  est de la forme  $\mathfrak{p}_x$ . De plus ce lemme admet une réciproque.

**emmeL.**

Supposons que pour tout idéal propre  $I$  de  $\mathcal{P}(X)$  il existe un  $x \in X$  avec  $I \subseteq \mathfrak{p}_x$ . Alors  $X$  est fini.

**Preuve:** Soit  $I = \langle \{x\}, x \in X \rangle$  l'idéal engendré par tous les singletons. Clairement  $I \not\subseteq \mathfrak{p}_x$  pour tout  $x \in X$ . Donc  $I = \mathcal{P}(X)$  et on peut écrire le 1 de  $\mathcal{P}(X)$  comme somme finie d'éléments de  $I$ , c'est-à-dire  $X = \{x_1\} \cup \dots \cup \{x_n\}$ .

Nous en déduisons immédiatement le théorème suivant que l'on comparera au théorème des anneaux de Boole finis.

**Théorème.**

L'application  $X \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{P}(X))$  est une bijection si et seulement si  $X$  est fini.

Ce résultat nous apprend qu'il y a un isomorphisme de foncteurs  $Id_{\mathbf{EnsFinis}} \simeq \text{Spec} \circ \mathcal{P}$ . Cet isomorphisme joint à  $Id_{\mathbf{AnnBooleFinis}} \simeq \mathcal{P} \circ \text{Spec}$  nous donne un point de vue général: les catégories des ensembles finis et des anneaux de Boole finis sont *équivalentes*.

**Résumé.**

Les foncteurs  $\mathcal{P} : \mathbf{Ens} \longrightarrow \mathbf{AnnComm}$  et  $\text{Spec} : \mathbf{AnnComm} \longrightarrow \mathbf{Ens}$  induisent une équivalence de catégories entre la catégorie des ensembles finis et celle des anneaux de Boole finis.

Après cela l'auteur se dit qu'il avait été très incomplet, qu'il aurait voulu parler de compactifié de Stone-Cech et de bien d'autres choses, mais il préféra reporter ça à un autre article et il alla se coucher lui aussi...

### Références

- [1] Favi Giordano, *Tychonoff revisité*, Journal de l'IMA 1, 59–61, 2000
- [2] Favi Giordano, *1 & ()*, Journal de l'IMA 4, 35–44, 2001
- [3] Stone Marshall H, *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 41, 37–111, 1937
- [4] Stone Marshall H, *The algebraization of harmonic analysis*, Math. Student. 17, 81–92, 1949
- [5] Brachamutanda, *Cogito ergo cogito*, Bibliotheca tautologica 11, 22–33, 1919