Andreas Dedner
dedner@mathematik.uni-freiburg.de
Assistent: Julien Diaz

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2006/2007 — Blatt 2 (31.10.2005)

Aufgabe 1

Seien $u \in C^2(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$, $v,\tau \in C^1(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$. Zeige, dass die nichtlineare Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \partial_x p(\partial_x u) = 0$$

äquivalent zum p-System

$$\begin{aligned} \partial_t \tau - \partial_x v &= 0 \\ \partial_t v + \partial_x \tilde{p}(\tau) &= 0 \end{aligned}$$

ist, wobei $\tilde{p} = -p$ ist.

Aufgabe 2 (Einspringende Ecke)

Sei $\Omega := \{(r,\varphi) \mid r \in (0,1), \varphi \in (0,\alpha)\}$ der Kreissektor mit dem Winkel $\alpha \in (0,2\pi)$. Zeige, dass es eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ des Randwertproblems

$$\begin{array}{rcllll} -\Delta u &=& 0 & & & \text{in } \Omega, \\ u(1,\varphi) &=& \sin\dfrac{\varphi\pi}{\alpha} & & & \text{für } \varphi \in (0,\alpha), \\ u(r,0) &=& u(r,\alpha) &=& 0 & \text{für } r \in (0,1) \end{array}$$

gibt. Für welche α sind die Ableitungen von u beschränkt und für welche quadratintegrabel (mit Begründung)?

Aufgabe 3 (Telegraphengleichung)
Betrachte für β, γ konstant die Lineare PDE

$$\partial_{tt} u(x,t) + \beta \partial_t u - \gamma \triangle u \quad = \quad 0$$

auf $\Omega \times [0,T]$ mit Anfangs- und Randdaten

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega \ , \\ \alpha \partial_t u(x,0) &= u_1(x) \quad \text{in} \quad \Omega \ , \\ u(x,t) &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \ . \end{aligned}$$

Für $k = 0, 1, \ldots$ seien λ_k die Eigenwerte vom Laplace Operator mit Eigenfunktionen v_k, d.h. $-\triangle v_k = \lambda_k v_k$ in Ω und $v_k = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir nehmen an, dass $u_0(x) = \sum_{k=0}^{K} a_k v_k(x)$ und $u_1(x) = \sum_{k=0}^{K} b_k v_k(x)$.

(a) Klassifizieren Sie die obige Gleichung in Abhängigkeit von β, γ.

(b) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$.
Hinweis: Machen Sie den Ansatz $u(x,t) = \sum_{k=0}^{K} w_k(t) v_k(x)$.

(c) Diskutieren Sie warum alle "Radiowellen" (die v_k) für $\beta > 0$ gedämpft werden - und zwar die Langwelligen (λ klein) schneller als die kurzwelligen (λ groß).

(d) Plotte für $\Omega = [-1,1]$, $\gamma = 1, \beta = 5.$ und $K = 1, a_0 = 1, a_1 = 0.2, b_0 = 0, b_1 = 0$ die zeitliche Entwicklung der Lösung.