Andreas Dedner
dedner@mathematik.uni-freiburg.de
Assistent: Julien Diaz

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2006/2007 — Blatt 2 (10.11.2006)

Aufgabe 1
Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix. Ferner sei die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u \quad = \quad 0$$

elliptisch.
Zeige, dass A positiv oder negativ definit ist.

Aufgabe 2
Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t v + \partial_x v &= \epsilon\partial_x^2 v \quad \text{in } \mathbb{R}\times(0,T), \\ v(\cdot,0) &= v_0(\cdot) \quad \text{in } \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $\epsilon, T > 0$ gegeben sind.
Zu $\Delta x, \Delta t > 0$ sei $x_j := j\cdot\Delta x$ und $t^n := n\cdot\Delta t$. Sei $v \in C^4(\mathbb{R}\times(0,T))$ die exakte Lösung von (1), die partiellen Ableitungen von v seien beschränkt und $v_j^n := v(x_j, t^n)$.

(a) Zeige:

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} \quad = \quad \epsilon\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta t) + O(\Delta x)$$

(b) Sei $u_j^0 := v_0(x_j)$ und

$$u_j^{n+1} \quad := \quad u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) + \epsilon\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right).$$

Zeige, dass $|u_j^n - v_j^n| \to 0$, falls $\Delta x, \Delta t \to 0$, wobei Sie Bedingungen an das Verhältniss Δt zu Δx stellen dürfen.

(c) Was für Bedingungen an $\Delta x, \Delta t$ erhält man, wenn man statt des Rückwärtsdifferenzenquotienten $\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$ den Vorwärtsdifferenzenquotienten $\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$ oder den zentralen Differenzenquotienten $\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$ verwenden würde?

Aufgabe 3 ((Diese Aufgabe wird fortgesetzt und kann auch als ganzes am 01.12. abgegeben werden))
Schreiben Sie ein Programm zur Lösung des Problems Lösen Sie in $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ das Problem

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \quad \text{in} \quad \Omega\,, \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

in $\Omega = (-1,1)\times(-1,1)$ mittels des 5-Punkte Differenzenschemas $\triangle^{(5)}$ auf einem gleichmässigen Gitter.
Testen Sie ihr Programm mit den Daten $f(x,y) = 2(1-y^2) + 2(1-x^2)$ und $g = 0$. Die exakte Lösung für dieses Problem ist $u(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$. Geben Sie folgende Aussgabe ab:

(a) Bestimmen Sie für für eine Folge von Gittern Ω_n mit $h_n = \frac{1}{2^n}$ und $n = 2,3,4,5,6,7$ den maximalen Fehler

$$e_n := \max_{P\in\Omega_n} |e_h(P)|.$$

(b) **EOC**: Die numerischen Konvergenzordnung (engl. experimental order of convergence) wird für zwei Lösungen u_1, u_2 auf Gittern Ω_1, Ω_2 mit Gitterweiten $h_1 > h_2$ definiert durch

$$\mathrm{EOC}_{h_1\to h_2} := \frac{\log(e_2) - \log(e_1)}{\log(h_2) - \log(h_1)}$$

wobei e_i der maximale Fehler zwischen u_i und der exakten Lösung u ist. Geben Sie für alle Paare von Gittern der oben angegebenen Folge den EOC aus. Sie erhalten eine Tabelle der Form

h	Fehler	$\mathrm{EOC}_{h_1\to h_n}$	$\mathrm{EOC}_{h_2\to h_n}$	$\mathrm{EOC}_{h_3\to h_n}$
$\frac{1}{4}$	e_1			
$\frac{1}{8}$	e_2	$\mathrm{EOC}_{\frac{1}{4}\to\frac{1}{8}}$		
$\frac{1}{16}$	e_3	$\mathrm{EOC}_{\frac{1}{4}\to\frac{1}{16}}$	$\mathrm{EOC}_{\frac{1}{8}\to\frac{1}{16}}$	
...	...	...	...	...

(Eine Motivation für den EOC kommt in der Übungsstude...)