Andreas Dedner
dedner@mathematik.uni-freiburg.de
Assistent: Julien Diaz

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2006/2007 — Blatt 4 (17.11.2006, Abgabe 01.12.2006)

Aufgabe 1 (Finite Elemente Diskretisierung)
Sei V_h ein endlichdimensionaler Raum von C^1 Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und sei $u_h \in C^1$ Lösung von

$$\int_\Omega \nabla u_h \nabla \varphi_h = \int_\Omega f\varphi \quad \text{für alle } \varphi \in V_h. \tag{1}$$

Bemerkung: später werden wir statt C^1 den Sobolev-Raum H^1 verwenden.

(a) Zeigen Sie, dass (1) bei Vorgabe einer Basis von V_h äquivalen ist zu einem quadratischen linearen Gleichungssystem der Form $AU = b$ der Dimension $N = \dim(V_h)$ für die Koeffizienten von u_h in der gewählten Basis. Setzen Sie $u_h = \sum_{i=1}^N u_i\varphi_i$ und zeigen Sie, dass (1) nur für die Basis erfüllt sein muss...

(b) Wir betrachten nun das Problem (1) auf dem Intervall $I := [x_0, x_N]$ in einer Raumdimension mit $x_0 < x_N$. Sei $(I_j)_{j=1}^N$ eine Zerlegung von I mit $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ und lokalen Gitterweite $h_j := x_{j+1} - x_j$. Wir definieren den endlichdimensionalen Raum der stückweise linearen Funktionen

$$V_h := \{\varphi \in C^0(I) \ : \ \varphi \text{ ist linear auf allen } \ I_j, j = 1, \dots, N\}$$

Zeigen Sie, dass es eine Basis $\{\varphi_i\}_{i=0}^N$ on V_h gibt mit $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$ $(j = 0, \dots, N)$ - das Kronecker Symbol δ_{ij} ist 1 falls $i = j$ und 0 sonst. Berechnen Sie $\alpha_{ij} := \sum_{k=0}^N \int_{I_k} \varphi_i'\varphi_j'$ für $0 \le i, j \le N$.

Aufgabe 2 (Referenzelement)
Durch $\hat{T} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 - x\}$ wird das so genannte *Referenzdreieck* mit den Ecken $\hat{p}_0 = (0, 0)$, $\hat{p}_1 = (1, 0)$, $\hat{p}_2 = (0, 1)$ definiert. Sei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein (nicht entartetes) Dreieck mit Ecken p_0, p_1, p_2 und $|T| \neq 0$.

(a) Geben Sie eine bijektive, affine Abbildung $F_T : \hat{T} \to T$ an zusammen mit ihrer Inversen F_T^{-1}.

(b) Sei $\hat{u} \in C^0(\hat{T})$ und sei $u \in C^0(T)$ gegeben durch $u(x, y) := \hat{u}(F_T^{-1}(x, y))$. Geben Sie die Kettenregel an zur Bestimmung von ∇u an und die Transformationformel für $\int_T u(x, y)\, dx\, dy$.

(c) Durch $Q_{\hat{T}}(\hat{u}) := \sum_{j=1}^{N} \hat{\omega}_i \hat{u}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$ mit $\hat{\omega}_i \in \mathbb{R}$ und $(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \in \hat{T}$ sei eine Quadratur für Funktionen $u \in C^0(\hat{T})$ definiert, welche exakt sei auf dem Raum der Polynome $P_n(\hat{T})$ n-ten Grades, d.h.

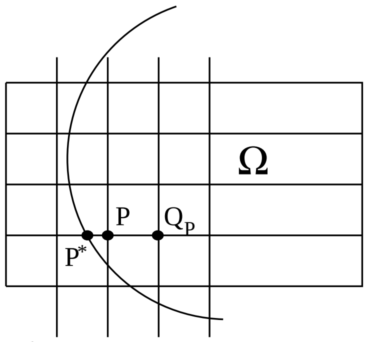
$$Q_{\hat{T}}(\hat{p}) = \int_{\hat{T}} \hat{p}(x,y)\, dx\, dy \quad \text{für alle} \quad \hat{p} \in P_n(\hat{T}) \ .$$

Konstruieren Sie mittels F_T und $Q_{\hat{T}}$ eine Quadratur $Q_T(u) := \sum_{j=1}^{N} \omega_i u(x_i, y_i)$ auf T mit $(x_i, y_i) \in T$, welche exakt ist auf $P_n(T)$, d.h. es soll gelten

$$Q_T(p) = \int_T p(x,y)\, dx\, dy \quad \text{für alle} \quad p \in P_n(T) \ .$$

Aufgabe 3 (Lineare Randrekonstruktion)
Wir betrachten das Differenzenschema mit $L_h := -\triangle^{(5)}$ auf dem regelmässigen Gitter $\mathbb{R}_h^2$ und der linearen Randrekonstruktion

$u_h(P) = \frac{1}{1+\alpha}(u(P^*) + \alpha u(Q_P))$ für $P \in \partial\Omega_h$; dabei ist $P^* \in \partial\Omega, Q_P \in \Omega_h$ und $\alpha h = |P - P^*|$, $h = |P - Q_P|$ und P, Q_P, P^* liegen auf einer Gitterlinie (s. Skizze).



Zeigen Sie, dass dieses Verfahren die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes aus der Vorlesung erfüllt und beweisen Sie die a-priori Abschätzung

$$\max_{P \in \bar{\Omega}_h} |e_h(P)| \leq Ch^2$$

mit einer Konstanten $C > 0$, welche nur von Ω und u abhängt aber nicht von h.

Aufgabe 4.Fortsetzung...
Schreiben Sie ein Programm zur Lösung des Problems Lösen Sie in $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ das Problem

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \quad \text{in} \quad \Omega \ , \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \ . \end{aligned}$$

in $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ mittels des kompakten 9-Punkte Differenzenschemas $\triangle^{(9)}$ auf einem gleichmässigen Gitter. Verwenden Sie zur Diskretisierung f_h von f einmal $f_P := f(P)$ und einmal die Modifikation $f_P := f(P) + \frac{1}{12}h^2\triangle^{(5)}f(P)$ für $P \in \Omega_h$. Testen Sie ihr Programm wieder mit den Daten $f(x,y) = 2(1-y^2) + 2(1-x^2)$ und $g \equiv 0$ - wie auf dem letzten Blatt schon angegeben, sowie mit $f(x,y) = \pi^2 \sin(\pi x)(5\sin(\pi y)^2 - 1), g \equiv 0$ - die exakte Lösung in diesem Fall ist $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)^2$.
Geben Sie wie auf dem letzten Blatt beschrieben für beide Verfahren eine EOC-Tabelle an.