Andreas Dedner
dedner@mathematik.uni-freiburg.de
Assistent: Julien Diaz

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2006/2007 — Blatt 7 (15.11.2006, Abgabe 22.12.2006)

Aufgabe 1 (Gemischte Randdaten)
Betrachten Sie das Randwertproblem in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= g_D \quad \text{auf } \partial\Omega_D \\ \nabla u \cdot n &= g_N \quad \text{auf } \partial\Omega_N \ , \end{aligned}$$

wobei n die äussere Normale an den Rand ist und $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$, $\Omega_D \cap \partial\Omega_N = \emptyset$ gilt. Zeigen Sie:

(a) Ist $\partial\Omega_D = \emptyset$ so ist das Problem nicht eindeutig lösbar.

(b) Ist $\partial\Omega_D = \emptyset$ und $\int_\Omega f \neq -\int_{\partial\Omega} g_N$ so hat das Problem keine Lösung - dies bezeichnet man als Kompatibilitätsbedingung.

(c) Sei nun $\partial\Omega_D \neq \emptyset$ und sei $V = H^1_D(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \ : \ \gamma v = 0 \text{ fast überall auf } \partial\Omega_D\}$. Konstruieren Sie eine stetige und V-elliptische Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und ein stetiges Funktional $l(\cdot)$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $u \in H^2(\Omega)$ und $a(u,\varphi) = l(\varphi)$ für alle $\varphi \in V$ so erfüllt u das Randwertproblem fast überall (γv ist die Spur von v).

Aufgabe 2
Betrachten Sie wieder das gemischte Randwertproblem aus der vorherigen Aufgabe und nehmen Sie an, dass eine Lösung existiert. Zeigen Sie, dass auch auf konvexen Gebieten u nicht notwendig $H^2(\Omega)$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie die Lösung u das Dirichlet Problem auf dem Gebiet mit der einspringenden Ecke und zeigen Sie, dass u auf einem konvexen Gebiet Ω' Lösung des gemischten Randwertproblems ist.

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{T}_h$ eine zulässige Triangulierung von $\Omega :=]0,1[$ mit $\sup_{T\in\mathcal{T}_h} |T| \leq h$, $f \in L^2(\Omega)$ eine Funktion mit Mittelwert 0 und

$$V_h \ := \ \left\{v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \mid v_{|T} \in \mathbb{P}_1(T), T \in \mathcal{T}_h\right\} \quad \text{und} \quad \mathring{V}_h \ := \ V_h \cap H^1_0(\Omega). \qquad (1)$$

(a) Sei $u_h \in V_h$ die Galerkin-Approximation der schwachen Lösung des Neumann-Problems

$$-u'' = f \text{ in }]0,1[, \quad u'(0) = u'(1) = 0,$$

d.h. für alle Testfunktionen $\varphi \in V_h$ gelte:

$$\int_0^1 u_h' \varphi_h' \, dx = \int_0^1 f \varphi_h \, dx.$$

Beweise die folgende Abschätzung:

$$|u_h'(0)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|_{L^2(]0,h[)} \sqrt{h}.$$

(b) Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung von $-\Delta u = f$ mit homogenen Randdaten. Ferner sei $u_h \in \mathring{V}_h$ die Galerkin-Approximation von u.

Zeige, dass u_h mit der Lagrange-Interpolierenden $I_h u \in \mathring{V}_h$ übereinstimmt, d.h. $I_h u \in \mathring{V}_h$ und $I_h u(p_i) = u(p_i)$ an allen inneren Knoten der Zerlegung.

Aufgabe 4

(a) Messen Sie den Fehler bei der Lagrange Interpolation in ihrem Matlab Programm in der $H^1(\Omega)$-Norm - benutzen Sie wieder die ein Punkt Quadratur.

(b) Berechnen Sie die L^2-Norm folgender stückweiser konstanten Funktion, welcher den Grad der Unstetigkeit von u_h mißt:

$$\eta_T = \sum_{l=0}^{2} |\nabla(u_{T,l} - u_T) \cdot n_{T,l}| \ .$$

Dabei ist $u_{T,l}$ die Lösung auf dem Nachbardreieck von T über die l-te Kante $S_{T,l}$ von T; ist diese Kante am Rand setzen wir $\nabla(u_{T,l} - u_T) = 0$. $n_{T,l}$ ist die äussere Normale an $S_{T,l}$.