Andreas Dedner
dedner@mathematik.uni-freiburg.de
Assistent: Julien Diaz

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2006/2007 — Blatt 8 (22.12.2006, Abgabe 12.01.2006)

Aufgabe 1 (Schwaches Maximumprinzip)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$-\Delta u \quad \leq \quad 0 \quad \text{in } \Omega,$$

d.h. für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$ f.ü. gilt:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx \quad \leq \quad 0$$

Zeige, dass dann bereits $u \leq 0$ f.ü. in Ω ist.
Hinweis: es gilt $u \in H^1(\Omega) \Rightarrow u^+ := \max\{u, 0\} \in H^1(\Omega)$.

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{T}$ eine zulässige Triangulierung, wobei für jedes Element T die Winkel γ_{ij}^T zwischen Kanten e_i^T, e_j^T in $(0, \frac{\pi}{2})$ seien. Sei $A = (a_{ij})$ die Steifigkeitsmatrix für den linearen Finite-Elemente Ansatz. Zeigen Sie, dass $a_{ii} > 0$ und $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$ gilt und dass für innere Punkte p_i gilt: $\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \leq a_{ii}$.
Hinweis: Zeigen Sie die Eigenschaften zunächst für die lokale Steifigkeitsmatrix mit Einträgen $a_{kl}^T := \int_T \nabla \varphi_k^T \nabla \varphi_l^T$. Zeigen Sie dazu, dass $a_{kl} = \frac{|e_k^T||e_l^T|}{4|T|} n_k^T \cdot n_l^T$ gilt und, dass $n_k^T \cdot n_l^T$ auch mit Hilfe von $\cos(\gamma_{ij})$ ausgedrückt werden kann - es sind e_k^T die Kanten von T und n_k^T die äusseren Normalen. ausgedrückt werden kann.

Aufgabe 3
Sei $\mathcal{T}$ eine regelmässige, kartesische Triangulierung von $\Omega := (0,1)^2$, wie sie in Abbildung 1 dargestellt ist, wobei h die Schrittweite auf der x-Achse beschreibt. Sei $V_\mathcal{T}$ der Raum der stetigen stückweise linearen Funktionen gegeben. Sei A^{fem} die Steifigkeitsmatrix zu $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ und A^5 die Matrix zum 5 Punkt Differenzenschema auf dem kartesischen Gitter mit Gitterweite h. Zeigen Sie, dass $A^{\text{fem}} = h^2 A^5$ gilt und für die rechten Seiten: $b_i^{\text{fem}} - h^2 b_i^{FD} = O(h^3)$ mit $b_i^{\text{fem}} = \int_\Omega f \varphi_i$ und $b_i^{FD} = f(p_i)$, wobei p_i ein innerer Knoten des Gitters ist.

Aufgabe 4
Zeichnen Sie eine zulässige Triangulieren des Gebiets Ω aus Abbildung 2.

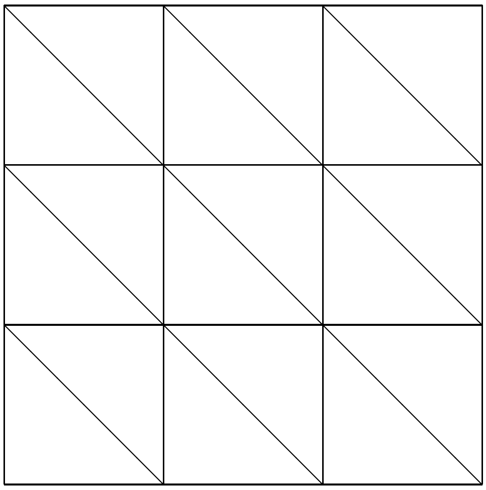

Abbildung 1: Triangulierung des Gebietes $\Omega = (0,1)^2$

Abbildung 2: Fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch