Andreas Dedner
dedner@mathematik.uni-freiburg.de
Assistent: Julien Diaz

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2006/2007 — Blatt 9 (12.01.2007, Abgabe 19.01.2007)

Allgemeine Finite-Element Räume:
Auf einem Referenzelement $\hat{T}$ seien R lineare Funktionale $K = (\chi_r)_{r=1}^R$ mit $\chi_r : H^m(\hat{T}) \to \mathbb{R}$ für $r = 1, \dots, R, m \in \mathbb{N}$ gegeben und sei $P(\hat{T}) \subset H^m(\hat{T})$ ein Funktionenraum mit der Dimension R.
Definition: Wir sagen $(P(\hat{T}), K)$ ist **unisolvent** falls für alle Vektoren $y \in \mathbb{R}^R$ ein $p \in P(\hat{T})$ existiert mit $\chi_r(p) = y_r$ für $r = 1, \dots, R$.
Ist $(P(\hat{T}), K)$ unisolvent so ist ein Interpolationsoperator $\hat{I}$ von $H^m(\hat{T}) \to P(\hat{T})$ durch die Vorgabe $\chi_r(\hat{I}v) = \chi_r(v)$ $(r = 1, \dots, R)$ wohl definiert.

Aufgabe 1
Sei $\hat{T}$ das Referenzdreieck in zwei Raumdimensionen mit Eckpunkten $\hat{p}_i$ und Kanten $\hat{e}_i$ gegenüber von $\hat{p}_i$; $\hat{m}_i$ sei der Mittelpunk und $\hat{n}_i$ die Normale von $\hat{e}_i$.

(a) Betrachte $K = \{\chi_r \ : \ r = 1, \dots, 6\}$ mit für $v \in H^2(\Omega)$: $\chi_r(v) = v(\hat{p}_r)$ für $r = 1, 2, 3$ und $\chi_{r+3}(v) = \frac{1}{|\hat{e}_r|} \int_{\hat{e}_r} v ds$ ist das Mittel von v auf $\hat{e}_r$ $(r = 1, 2, 3)$. Zeigen Sie, dass $(P_2(\hat{T}), K)$ unisolvent ist.

(b) Seien für $i = 1, 2, 3$ zwei symmetrisch zum Mittelpunkt angeordnete Punkte $\hat{q}_{2i}, \hat{q}_{2i+1}$ auf $\hat{e}_i$ gegeben. Zeigen Sie, dass $(P_2(\hat{T}), K)$ nicht unisolvent ist mit $K = \{\chi_r \ : \ r = 1, \dots, 6\}$, $\chi_r(v) = v(\hat{p}_r)$ für $r = 1, \dots, 6$ und $v \in H^2(\Omega)$.

(c) Betrachte $K = \{\chi_r \ : \ r = 1, \dots, 6\}$ mit für $v \in H^m\Omega)$: $\chi_r(v) = v(\hat{p}_r)$ für $r = 1, 2, 3$ und $\chi_{r+3}(v) = \nabla v(\hat{m}_r) \cdot \hat{n}_r$. Zeigen Sie, dass $(P_2(\hat{T}), K)$ unisolvent ist.

Welchen Wert muss m mindestens haben, damit $\chi_r : H^m \to \mathbb{R}$ erklärt werden kann?

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Interpolationsfehlerabschätzung für die linearen Lagrange-Interpolation optimal ist (etwa in den L^2-Räumen); geben Sie dazu ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit einer Familie von Triangulierungen $\mathcal{T}_h$ an, so dass für $m = 0, 1, p = 2$ eine Funktion v existiert mit

$$|v - I_h v|_{H^{m,p}} \geq C h^{2-m}$$

gilt.
Tip: Sie können zum Beispiel ein Gebiet Ω mit $\omega_h \subset \Omega$ und $\omega := \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq h, x > 0, y > 0\} = \{(r, \varphi) \ : \ r < h, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$ für alle $h < 1$ ansetzen und eine $\mathcal{T}_h$

verwenden, bei der jede Triangulierung ein Dreieck T_h enthält mit $\omega \subset T_h$. Dann ist: $\|v - I_h v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \|v - I_h v\|^2_{L^2(\omega)} = \|v - v_{T_h}\|^2_{L^2(\omega)}$.
Sie können auch ein anderes ω_h aussuchen, etwa $\omega_h = [0, h]^2$.
Beachten Sie aber, dass v unabhängig sein muss von h - v darf aber von m abhängen.

Aufgabe 3 (Orthogonalprojektion als Interpolierende)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $\mathcal{T}_h$ eine zulässige formreguäre Triangulierung von Ω,d.h.

$$\sup_{T \in \mathcal{T}_h} \sigma_T \leq C \quad \text{und} \quad \sup_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \leq h,$$

wobei C unabhängig von h und $\sigma_T = \frac{h_T}{\rho_T}$ ist.
Weiter sei $\hat{T}$ das Referenzelement und $\hat{P} : H^{k+1}(\hat{T}) \to \mathbb{P}_k(\hat{T}) \subset H^1(\hat{T})$ die Orthogonalprojektion, d.h.

$$\left(u - \hat{P}u, \varphi\right)_{H^1(\hat{T})} = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{P}_k(\hat{T}), u \in H^{k+1}(\hat{T}).$$

Für ein $T \in \mathcal{T}_h$ definieren wir die Interpolation $P_T : H^{k+1}(T) \to H^1(T)$ durch

$$P_T u = \hat{P}(u \circ F_T) \circ F_T^{-1},$$

wobei $F_T : \hat{T} \to T$ die affin Abbildung zwischen dem Referenzelement und dem Element T ist.
Zeige, dass für $u \in H^{k+1}(\Omega)$ gilt:

$$|u - P_h u|_{H^1(\Omega)} \leq c h^k |u|_{H^{k+1}(\Omega)},$$

wobei $P_h u = P_T u$ ist auf T.
Beweisen Sie auch, dass P_h wohldefiniert ist.