

Andreas Dedner
dedner@mathematik.uni-freiburg.de
Assistent: Julien Diaz

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2006/2007 — Blatt 10 (19.01.2007, Abgabe 26.01.2007)

Aufgabe 1 (A-posteriori in 1D)

Sei $\Omega :=]0, 1[$ und $u \in H_0^1(\Omega)$ die schwache Lösung von

$$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

zu gegebenem $f \in L^2(\Omega)$. Ferner sei

$$\mathcal{T} := \{[x_{i-1}, x_i] \mid 0 = x_0 < \dots < x_n = 1, i = 1, \dots, n\}$$

eine zulässige Triangulierung von Ω und $X_{\mathcal{T}} := \{v \in C^0(\Omega) \mid v|_D \in \mathbb{P}_k(D) \text{ für } D \in \mathcal{T}\}$ und $\mathring{X}_{\mathcal{T}} := X_{\mathcal{T}} \cap H_0^1(\Omega)$. Schließlich sei $u_{\mathcal{T}} \in \mathring{X}_{\mathcal{T}}$ die Galerkin-Approximation von u , $e_{\mathcal{T}} := u - u_{\mathcal{T}}$ und $I_{\mathcal{T}} : H_0^1 \rightarrow \mathring{X}_{\mathcal{T}}$ die Lagrange-Interpolierende.

Zeige

$$\|e'_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{D \in \mathcal{T}} (f + u''_{\mathcal{T}}, e_{\mathcal{T}} - I_{\mathcal{T}}e_{\mathcal{T}})_{L^2(D)}$$

und schließe mit Hilfe der Interpolationsabschätzung die A Posteriori-Fehlerabschätzung

$$|u - u_{\mathcal{T}}|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c \sum_{D \in \mathcal{T}} h(D)^2 \|f + u''_{\mathcal{T}}\|_{L^2(D)}^2,$$

wobei die Konstante $c > 0$ nicht von u abhängt.

Hinweis: Zeige zunächst, dass für alle $v \in \mathring{X}_{\mathcal{T}}$ gilt: $\|e'_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 = (e'_{\mathcal{T}}, e'_{\mathcal{T}} - v')$.

Aufgabe 2

Sei \mathcal{T}_h eine Triangulierung von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und sei $\mathring{\mathcal{S}}_h$ die Menge der inneren Kanten und an $S \in \mathring{\mathcal{S}}_h$ sei eine Normale n_S fixiert; d.h. zu $S \in \mathring{\mathcal{S}}_h$ existieren immer zwei Elemente $T_-, T_+ \in \mathcal{T}_h$ mit $T_- \cap T_+ = S$ und n_S steht senkrecht auf S und zeigt von T_- nach T_+ (bzw. n_S ist die äussere Normale an ∂T_- und $-n_S$ ist die äussere Normale an ∂T_+). Sei nun eine stückweise stetige Funktion v gegeben und auf $S \in \mathring{\mathcal{S}}_h$ seien die Grenzfunktionen von T_+ bzw. T_- gegeben durch $v_S^+(\cdot) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\cdot + \varepsilon n_S)$ und $v_S^-(\cdot) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\cdot - \varepsilon n_S)$. Wir definieren dann noch den Sprung von v über S in Normalenrichtung durch $[v]_S := v_S^+ - v_S^-$. Sei $V_h \subset V \cap C^0(\Omega)$ ein Finite-Elemente Raum mit stückweise glatten Funktionen und mit $V = H_0^1(\Omega)$. Zu $u_h \in V_h$ definieren wir $\Delta_h u_h$ als die stückweise definierte Funktion, die auf jedem $T \in \mathcal{T}_h$ mit Δu_h übereinstimmt - auf T ist u_h glatt und Δu_h ist wohldefiniert.

Sei $u \in H^2(\Omega)$ die schwache Lösung zur Laplace-Gleichung, d.h. $a(u, \varphi) = l(\varphi)$ für alle $\varphi \in V$ mit $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ und $l(v) = \int_{\Omega} f v$. Sei $u_h \in V_h$ die Galerkin-Approximation, d.h. $a(u_h, \varphi_h) = l(\varphi_h)$ für alle $\varphi_h \in V_h$. Zeigen Sie, dass

$$a(u_h, \varphi_h) = - \int_{\Omega} \Delta u_h \varphi_h - \sum_{S \in \hat{\mathcal{S}}_h} \int_S [\nabla u_h \cdot n_S]_S \varphi_h .$$

Aufgabe 3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $u_0 \in L^2(\Omega)$. Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta_x u &= 0 & \text{in } \Omega \times]0, \infty[, \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \times]0, \infty[, \\ u(\cdot, 0) &= u_0 & \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Durch Diskretisierung in der Zeit (mit Schrittweite k) erhalten wir das folgende semidiscrete Verfahren:

$$u^{n+1} - k\Delta u^{n+1} = u^n. \tag{2}$$

(a) Geben Sie eine schwache Formulierung für diese Gleichung an der Form:

$$a(u^{n+1}, \varphi) = l^n(\varphi)$$

mit $a : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $l^n : H_0^1 \rightarrow \mathbb{R}$ - verwenden Sie den Projektionssatz.

(b) Zeige, dass die schwache Lösung u^{n+1} wohldefiniert ist, d.h. zu $u^n \in H_0^1(\Omega)$ existiert genau eine schwache Lösung $u^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$ von (2).

(c) Die Folge $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unabhängig von k beschränkt in $L^2(\Omega)$. Genauer gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|u^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u^0\|_{L^2(\Omega)}.$$

Hinweis : testen Sie mit u^{n+1} .

(d) Das Verfahren (2) ist konsistent, d.h. ist $u \in C^3(\Omega \times]0, \infty[)$ eine klassische Lösung von (1), so gilt $|\frac{du_k(x,t)}{dt} - \frac{du(x,t)}{dt}| \rightarrow 0$ für $k \rightarrow 0$, wobei

$$u_k(x, t) := \frac{(n+1)k - t}{k} u^n(x) + \frac{t - nk}{k} u^{n+1}(x) \quad \text{für } t \in [nk, (n+1)k].$$