Andreas Dedner
dedner@mathematik.uni-freiburg.de
Assistent: Julien Diaz

Übung zur Vorlesung

Numerik partieller Differentialgleichungen

WS 2006/2007 — Blatt (20.12.2006)

Aufgabe 1

Implementieren Sie ein Programm zur Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} -\triangle u &= f \quad \text{in } \Omega \, , \\ u &= g \quad \text{in } \partial\Omega \, , \end{aligned}$$

mittels der Finite-Element Methode für eine gegebene Triangulierung von $\Omega \in \mathbb{R}^2$. Implementieren Sie folgende Testprobleme:

(a) Mit Lösung $u \in C^\infty$, wobei u kein Polynom mit Grad kleiner zwei sein sollte.

(b) Mit $u \in C^2$ aber nicht in C^3.

(c) Das Problem mit der Einspringenden Ecke mit 180 Grad.

(d) Das Problem mit der Einspringenden Ecke mit 270 Grad.

(e) Das Problem mit der Einspringenden Ecke mit 360 Grad.

Alle unten beschrieben Aufgaben sollten mit allen Beispielen durchgeführt werden und die Resultate mit den theoretischen Aussagen aus der Vorlesung verglichen werden. Führen Sie folgende Schritte bei der Implementierung durch:

- Stellen Sie dabei die Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite auf, indem Sie die lokalen Beiträge berechnen - mit dem $O(N_0)$ Algorithmus aus der Vorlesung. Dabei sollte die Aufstellung der lokalen Steifigkeitsmatrix und die Integration von $\int_T f\varphi_i$ in eigenen Funktionen durchgeführt werden.

- Lösen Sie das Problem mit linearen und quadratischen Finite-Elementen. Die lokale Steifigkeitsmatrix sollte dabei exakt berechnet werden; zur Quadratur der rechten Seite nehmen Sie eine passende Quadraturformel.

- Berechnen Sie den Fehler zur exakten Lösung und den EOC in der L^2- und in der H^1-Norm auf einer Folge von global verfeinerten Gittern.

Aufgabe 2

Implementieren Sie folgenden Algorithmus zur lokalen Gitteradaption:
Sei η_h eine gegebene stückweise konstante Indikatorfunktion mit $\eta_{|T_i} = \eta_i$ für alle T_i aus der Triangulierung und sei $\theta \in (0,1)$ eine gegebene Konstante. Sei π eine Permutation von $\{0, \ldots, N_0\}$ mit $\eta_{\pi(i-1)} \geq \eta_{\pi(i)}$ für $i \in \{2, \ldots, N_0\}$.
Setze $\eta = \sum_{i=1}^{N_0} \eta_i, e = 0, i = 1$:
Solange $e < \theta\eta$ führe folgende Schritte aus:

(a) Markiere $T_{\sigma(i)}$.

(b) Setze $e = e + e_i$, wobei e_i die Summe der η_k über alle markierten Elemente T_k ist.

(c) $i = i + 1$.

Verfeinere das Gitter.
Der ganze Algorithmus mit lokaler Adaption lautet:
Lese Makrogitter $\mathcal{T}_0$ ein, setze $n = 0$ und iteriere folgende Schritte:

(a) Lese Makrogitter $\mathcal{T}_n$ mit $n = 0$ ein.

(b) Berechne Lösung u_n.

(c) Berechne Indikatorfunktion η_n.

(d) Falls $e <$ Toleranz Abbruch, sonst

(e) Markiere und adaptiere Gitter.

(f) $n = n + 1$.

Testen Sie ihr Programm anhand der folgenden zwei Indikatoren aus der Vorlesung:

(a) Benutzen Sie für η_h den Residuumsindikator:

$$\eta_T = 2|T| \int_T |\triangle u_T + f|^2 + |S_l^T| \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{2} \int_{S_l^T} (\nabla u_T \cdot n_l^T - \nabla u_l^T \cdot n_l^T)^2 \; .$$

(b) Benutzen Sie für η_h den Punktindikator mit $J(\varphi) = \varphi(p_0), p_0 = (-0.15, 0.5)$:

$$\eta_T = \int_T \Big(|\triangle u_T + f| + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{2} \int_{S_l^T} |\nabla u_T \cdot n_l^T - \nabla u_l^T \cdot n_l^T| \Big) |T|^{\frac{3}{2}} (|p_T - p_0| + \mathrm{TOL})^{-2} \; .$$

hierbei sei p_T der Schwerpunkt des Dreiecks T: $p_T = \frac{1}{3} \sum_{l=0}^{2} p_i^T$.

Wählen Sie einmal $\theta = 0.4$ und einmal $\theta = 0.2$ und führen Sie diesen Algorithmus mit einer Reihe von Werten für die Toleranz durch. Erzeugen Sie für die oben beschriebenen Testprobleme einen Plot, in dem Sie auf der x-Achse die Anzahl der Freiheitsgrade, und auf der y-Achse die folgenden vier Grössen auftragen: den Wert exakten Fehler für die Rechnung mit dem global Verfeinerten Gitter, den exakten Fehler $\|\nabla e_h\|_{L^2}$ und den Indikator $(\sum_T \eta_T)^{\frac{1}{2}}$ für die lokal adaptierte Rechnung, sowie die eingestellte Toleranz. Pro Testproblem sollten Sie so vier Plots erhalten ($\theta = 0.2, 0.4$ und L^2- bzw. H^1-Fehler) mit jeweils vier Kurven.