

WOCHENFRAGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I (HS 2011)

Frage 1.

- (a) Was ist eine 2×5 -Matrix?
- (b) Wie lautet der Matrixeintrag a_{24} der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Frage 2.

- (a) Wann ist die Multiplikation von zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{k\ell})$ definiert? Welches Format hat dann das Produkt $C := AB$? Wie lautet der Eintrag $c_{i\ell}$ des Produktes C ?
- (b) Berechne $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Frage 3.

- (a) Wann heisst eine Matrix A invertierbar?
- (b) Ist die Matrix $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ invertierbar?

Frage 4.

- (a) Wie sieht eine Elementarmatrix vom Typ II aus?
- (b) Beschreibe alle 3×3 -Elementarmatrizen vom Typ II.
- (c) Was bewirkt die Linksmultiplikation mit der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1 \end{bmatrix}$?

Frage 5.

- (a) Charakterisiere die Zeilenstufenform einer Matrix.
- (b) Bringe die Matrix $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ durch elementare Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform.
- (c) Beschreibe den Lösungsraum des zugehörigen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Frage 6.

- (a) Was bewirkt die Rechtsmultiplikation mit der Matrix $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1 \end{bmatrix}$?
- (b) Was ist die Inverse der obigen Matrix?

Frage 7.

- (a) Durch welche Eigenschaften ist die Determinatenfunktion Det eindeutig bestimmt?
- (b) Was ist die Determinante von $\begin{bmatrix} & & 2 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$ und von $\begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$?
- (c) Richtig oder falsch: Besteht die letzte Spalte einer quadratischen Matrix A aus lauter Nullen, so ist $\text{Det } A = 0$.

Frage 8.

- (a) Wann heisst eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ injektiv, wann surjektiv und wann bijektiv?
- (b) Wieviele Abbildungen gibt es von der Menge $\{a, b, c\}$ in die Menge $\{1, 2\}$? Wieviele davon sind surjektiv und wieviele injektiv?

Frage 9.

- (a) Was ist eine Permutation?
- (b) Wieviele Permutationen besitzt die Menge $\{\$, \%, \&\}$?
- (c) Beschreibe alle Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$, welche 1 und 3 vertauschen. Wieviele sind es?

Frage 10.

- (a) Was ist eine Permutationsmatrix?
- (b) Wie sieht die Permutationsmatrix zur Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ aus?

Frage 11.

- (a) Was ist eine assoziative Verknüpfung auf einer Menge M ?
- (b) Wieviele Verknüpfungen gibt es auf der zweielementigen Menge $M := \{a, b\}$? Wieviele davon sind kommutativ?
- (c) Gibt es eine Verknüpfung auf $\{a, b\}$, die nicht assoziativ ist?

Frage 12.

- (a) Was ist eine Untergruppe einer Gruppe G ?
- (b) Wie sehen die Untergruppen von \mathbb{Z} (= ganze Zahlen mit Addition) aus?

Frage 13.

- (a) Was ist eine Linearkombination von einer geordneten Menge (v_1, \dots, v_n) von Vektoren eines Vektorraumes V ?
- (b) Was ist der Spann von (v_1, \dots, v_n) ?
- (c) Spannen die reellen Vektoren $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 4, 5)$ den Vektorraum \mathbb{R}^3 auf?

Frage 14.

- (a) Wann sind zwei Vektoren $v, w \in V$ eines K -Vektorraumes V linear abhängig?
- (b) Sind die beiden reellen Vektoren $(0, 0, 0)$ und $(-1, 0, 1)$ linear abhängig?

Frage 15.

- (a) Was besagt der Basisergänzungssatz?
- (b) Wende ihn auf die Vektoren $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ des \mathbb{R}^3 an.

Frage 16.

- (a) Was sind die Koordinaten eines Vektors $v \in V$ bezüglich einer Basis $\mathfrak{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ von V ?
- (b) Bestimme die Koordinaten von $v := (1, 0)$ bezüglich der Basis $\mathfrak{B} := (v_1 := (1, 1), v_2 := (1, -1))$ des \mathbb{R}^2 .

Frage 17.

- (1) Es seien $\mathfrak{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathfrak{B}' = (w_1, \dots, w_n)$ zwei Basen des K -Vektorraumes V . Wie ist die Übergangsmatrix P von \mathfrak{B} zu \mathfrak{B}' definiert?
- (2) Es sei $V = \mathbb{R}^2$. Bestimme die Übergangsmatrix P von $\mathfrak{B} = ((1, 0), (1, 1))$ zu $\mathfrak{B}' = ((0, 1), (1, 0))$.

Frage 18.

- (1) Was ist eine lineare Abbildung?
- (2) Sind die folgenden Abbildungen $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ linear?
 - (a) $\varphi((x, y)) := 3x - y$;
 - (b) $\varphi((x, y)) := x + y - 1$;
 - (c) $\varphi((x, y)) := xy$.