Reelle Analysis **Wintersemester 2002/03**

Serie 10

Vorlesung: Prof. C. Bandle Übung: J. Horák, S. Stingelin

* 1. (a) Ist der Raum $\{x = (\xi_1, \xi_2, \dots)\}$ mit der Norm $\|x\| = \sup_n \frac{|\xi_n|}{n}$ ein Banachraum?

(b) Konvergiert die kanonische Folge $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$?

(c) Wird die Norm durch ein Skalarprodukt induziert?

* 2. Plotte die Polynome $p_n(x) = c_n(1-x^2)^n$, $\int_{-1}^{1} p_n \mathrm{d}x = 1$ auf dem Intervall $(-1, 1)$.

Gib eine heuristische Erklärung an, warum $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)p_n(x-y)\mathrm{d}y$ für $n \to \infty$ gegen $f(x)$ konvergiert.

* 3. (a) Zeige, dass $\{\alpha_n \sin nx, \beta_n \cos nx\}_{n\geq 0}$ für geeignetes α_n, β_n ein Orthonormalsystem bezüglich dem Skalarprodukt $\int_0^{2\pi} fg\,\mathrm{d}x$ bilden.

(b) Bestimme die Fourierreihe von $f(x) = x$ bezüglich dem obigen System.

4. Welchen Bedingungen muss eine Folge $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ genügen, damit sie die Fourierkoeffizienten eines Elementes f in einem Hilbertraum bezüglich des Orthonormalsystems $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist?

5. Falls $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ein vollständiges Orthonormalsystem, und $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ein weiteres Orthonormalsystem ist mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < \infty$, dann ist $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ vollständig. Beweis!

Abgabe: 28. Januar 2003

* Übungen für die Physiker (2 CP).