Reelle Analysis — Wintersemester 2002/03
Serie 4

Vorlesung: Prof. C. Bandle — Übung: J. Horák, S. Stingelin

* 1. Zeige, dass die Differentialgleichung

$$y''(x) = f(x,y)\ ,\quad y(x_0) = y_0\ ,\quad y'(x_0) = y_1$$

äquivalent ist mit der Integralgleichung

$$y(x) = y_0 + y_1(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t)\, f(t, y(t))\, \mathrm{d}t\ .$$

2. Bestimme die im Nullpunkt differenzierbaren Lösungen der Funktionalgleichung

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1 - f(x)f(y)}\ .$$

(Wink: Leite eine Differentialgleichung für f her.)

* 3. Es sei $\|A\|$ eine Matrixnorm, für die $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ gilt.

(a) Zeige, dass $\|\int A\,\mathrm{d}t\| \leq \int \|A\|\,\mathrm{d}t$ gilt.

(b) Gib ein Beispiel einer solchen Norm an.

(c) Zeige, dass für Matrizen die Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(AB) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}B + A\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

gilt, wobei $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = (\dot{a}_{ij})$.

4. Es sei $f(x,y)$ stetig und lipschitzstetig bzgl. y in $\mathbb{R}^{m+1}$ und $\|f(x,y)\| \leq M$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Bestimme das maximale Existenzintervall einer Lösung von $y' = f(x,y)$.

* 5. Berechne die allgemeine Lösung von $y^{(4)} = y$.

6. Bakterien mögen sich mit einer Geschwindigkeit vermehren, die der vorhandenen Bakterienanzahl proportional ist. Gleichzeitig entsteht ein Gift, das mit einer Geschwindigkeit tötet, die der Giftmenge und Bakterienanzahl proportional ist. Ferner möge das Gift mit einer Geschwindigkeit entstehen, die der Anzahl vorhandenen Bakterien proportional ist.

(a) Stelle die Differentialgleichungen auf.

(b) Löse sie unter der Annahme, dass alle Proportionalitätsfaktoren eins sind.

Abgabe: 19. November 2002

* Übungen für die Physiker (2 CP).