

Reelle Analysis

Serie 9

Vorlesung: Prof. C. Bandle

Wintersemester 2002/03

Übung: J. Horák, S. Stingelin

* 1. Zeige, dass in einem Banachraum jede Cauchyfolge gegen genau einen Grenzwert konvergiert.

* 2. Ist der Raum

$$C^\alpha([0, 1]) := \left\{ f \in C([0, 1]) : |f|_\alpha := \sup_{x, y \in [0, 1]} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty \right\}, \quad \alpha \in (0, 1]$$

mit der Norm $\|f\| := \|f\|_\infty + |f|_\alpha$ ein Banachraum?

3. Folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x_0\|$, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$?

* 4. Sei $E := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : \|x\| := \sup_i |x_i| < \infty \right\}$.

(a) Konvergiert $\{e_i\}_{i=1}^\infty$? (e_i ist die kanonische Basis.)

(b) Gib eine Norm an, für welche diese Folge konvergiert.

(c) Enthält jede beschränkte Folge in E eine konvergente Teilfolge?

5. (a) Ist die Abbildung $f \mapsto \max_{[0, 1]} |f'(x)|$ eine Norm auf $C^1([0, 1])$?

(b) Ist $\|f\| := \sup_{[0, 1]} |f(x)| + \sup_{[0, 1]} |f'(x)|$ eine Norm auf $C^1([0, 1])$?

* 6. Beweise die Schwarzsche Ungleichung für ein beliebiges Skalarprodukt.

Abgabe: 21. Januar 2003

* Übungen für die Physiker (2 CP).